Factorización LU

Alexis Vera Pérez
Instituto de Estadística & Sistemas Computarizados de Información
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Agosto 2007

En el momento de resolver un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones en n desconocidas, podemos recurrir a diferentes métodos. Uno de los métodos más utilizados lo es el **método de eliminación de Gauss** el cual consiste en convertir la matriz aumentada $(A|\mathbf{b})$, donde A es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, en la forma escalonada.

Si U es una matriz triangular superior cuyos elementos diagonales son diferentes de cero, entonces el sistema lineal $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser resuelto sin tener que transformar la matriz aumentada $(U|\mathbf{b})$ a la forma escalonada. La matriz aumentada está dada por

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} & b_1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & u_{33} & \ldots & u_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

y la solución se obtiene por el siguiente algoritmo (**sustitución en reversa**):

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{u_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - u_{n-1n}x_n}{u_{n-1n-1}} \\ &\vdots \\ x_j &= \frac{b_j - \sum_{k=n}^{j-1} u_{jk}x_n}{u_{jj}} \qquad j = n, n-1, \ldots, 2, 1 \end{aligned}$$

De forma parecida, si L es una matriz triangular inferior cuyos elementos diagonales son diferentes de cero, entonces el sistema lineal $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser resuelto de la siguiente forma: La matriz aumentada tiene la forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \ell_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \dots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & \ell_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

y la solución se obtiene por el siguiente algoritmo (**sustitución hacia adelante**):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{\ell_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - \ell_{21}x_1}{\ell_{22}} \\ &\vdots \\ x_j &= \frac{b_j - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}x_k}{\ell_{jj}} \qquad j = 2, \dots, n \end{aligned}$$

Ejemplo 1 *Para resolver el sistema lineal*

$$\begin{aligned} 4x_1 &= -36 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 16 \end{aligned}$$

utilizamos sustitución hacia adelante y obtenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-36}{4} = -9 \\ x_2 &= \frac{11 - 3x_1}{2} = 19 \\ x_3 &= 16 - x_2 - x_1 = 6 \end{aligned}$$

Así que la solución para el sistema de ecuaciones triangular inferior dado es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Supongamos que una matriz $A_{n\times n}$ puede ser escrita como el producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U, esto es,

$$A = LU$$

Entonces decimos que A tiene una **factorización LU**. Esta factorización nos permite resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sustituyendo LU por A, obtenemos

$$(LU)\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

esto implica que

$$L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b} \tag{2}$$

Si $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$, entonces tenemos que

$$L\mathbf{z} = \mathbf{b} \tag{3}$$

Como L es una matriz triangular inferior, podemos resolver para $\mathbf{z}$ utilizando sustitución hacia adelante. Luego, como U es una matriz triangular superior, resolvemos $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ por sustitución en reversa.

Ejemplo 2 *Considere el sistema lineal de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= 16 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 10 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

y su factorización LU es

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Utilizando la ecuación (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por sustitución hacia adelante obtenemos

$$\begin{aligned} z_1 &= 6 \\ z_2 &= 16 - 2z_1 = 4 \\ z_3 &= 2 + 2z_2 - 2z_1 = -2 \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$*,*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= \frac{4 - 2x_3}{-1} = -2 \\ x_1 &= \frac{6 - 4x_3 - 3x_2}{2} = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución para el sistema lineal dado es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El siguiente ejemplo ilustra como encontrar una[1] factorización LU para una matriz.

[1] En general, una matriz puede tener más de una factorización LU.

Ejemplo 3 *Para encontrar la factorización LU de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$

Primero convertimos en cero todos los elementos debajo del primer elemento diagonal de A. Para esto, sumamos (-2) veces la primera fila de A a la segunda fila de A. Luego sumamos la primera fila de A a la tercera fila de A, y por último sumamos (-4) veces la primera fila de A a la cuarta fila de A, obteniendo la siguiente matriz

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

Mientras tanto, comenzamos la construcción de una matriz triangular inferior, L_1*, con 1's en la diagonal principal. Para hacer esto, colocamos los opuestos de los multiplicadores utilizados en las operaciones de fila en la primera columna de* L_1 *debajo del primer elemento diagonal de* L_1 *y obtenemos la siguiente matriz*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & * & 1 & 0 \\ 4 & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos (-3) veces la segunda fila de U_1 *a la tercera fila de* U_1 *y sumamos (-1) veces la tercera fila de* U_1 *a la cuarta fila de* U_1*. Colocamos los opuestos de los multiplicadores debajo del segundo elemento diagonal de* L_1 *y obtenemos*

$$U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} y \; L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos (-1) veces la tercera fila de U_2 *a la cuarta fila de* U_2*. Luego colocamos el opuesto de este multiplicador debajo del tercer elemento diagonal de* L_2 *y obtenemos las matrices*

$$U_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices U_3 y L_3 componen una fatorización LU para la matriz A.