FUNCIONES EN $\mathbb{R}$

Alexis Vera Pérez
Instituto de Estadística & Sistemas Computarizados de Información
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Agosto 2007

1 Definición y notación

Definición 1 *Una* **función** *es una relación de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos (Dominio y Campo de Valores) donde a cada elemento en el dominio se le asigna uno y solamente un elemento en el campo de valores.*

Podemos utilizar varias formas para denotar una función f. Por lo general las funciones que estudiamos le asignan a cada número real en su dominio un número real.
Esto es,

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

En general, funciones que van desde un conjunto A hasta un conjunto B, las denotamos $f : A \longrightarrow B$.

A cada elemento en el campo de valores se le llama **imágen** de la función. Si f es la función que a cada número real x le asigna $x + 7$, escribimos

$$f : x \mapsto x + 7$$

Para indicar **la imágen de x en f** utilizamos la notación

$$f(x) = x + 7$$

y se lee "f de x es igual a $x + 7$".

EJEMPLO
Si $f(x) = x^2 + 1$, indica $f(2)$, $f(\pi)$ y $f(x+h)$.

- $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
- $f(\pi) = \pi^2 + 1$
- $f(x+h) = (x+h)^2 + 1 = x^2 + 2xh + h^2 + 1$

2 Dominio y Campo de valores

Definición 2 *El* **dominio** *de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de números reales para los cuales la imágen de f es un número real. Esto es,*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

EJEMPLO
Indica el dominio de las siguientes funciones: $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ y $h(x) = \dfrac{x^2+6}{2-x}$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$
- Sabemos que para que $\sqrt{x-1}$ sea un número real el radicando tiene que ser mayor o igual a cero. Por lo tanto, $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Así que $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1, \infty)$.
- Para que h esté definida sobre $\mathbb{R}$ su denominador tiene que ser diferente de cero. Por lo tanto, $2 - x \neq 0 \Rightarrow 2 \neq x$. Así que $D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$.

Definición 3 *El* **campo de valores** *de una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de $y \in \mathbb{R}$ tales que existe al menos un $x \in A$, $y = f(x)$. Esto es,*

$$CV_f = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in A) \wedge (y = f(x))\}$$

EJEMPLO
Sea $f(x) = x^3 + 5$. Vemos que f siempre está definida sobre los reales (*i.e.* $D_f = \mathbb{R}$). ¿Existe para todo $y \in \mathbb{R}$ algún x tal que $x^3 + 5 = y$? Si es cierto, entonces $CV_f = \mathbb{R}$.

3 Algebra de las funciones

De igual forma que con los números reales, podemos efectuar operaciones de *suma, resta, multiplicación* y *división* con funciones.

Definición 4 *Si f, g son funciones y $x \in (D_f \cap D_g)$, entonces podemos definir las siguientes funciones:*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \qquad \textit{suma de } f \textit{ y } g \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) \qquad \textit{producto de } f \textit{ y } g \end{aligned}$$

EJEMPLO
Sean $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = x^2$.

- indica el dominio de $f+g$; fg.
- Halla una fórmula para $(f+g)(x)$; $(fg)(x)$.

SOLUCION

- Sabemos que $D_f = [-1, \infty)$ y $D_g = \mathbb{R}$.
  Entonces $D_f \cap D_g = [-1, \infty) = D_{f+g} = D_{fg}$.
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + x^2$.
  $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2\sqrt{x+1}$.

Definición 5 $\forall x \in (D_f \cap D_g)$, *definimos*

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$\forall x \in (D_f \cap D_g)$, *tal que* $g(x) \neq 0$, *definimos*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

4 Composición de funciones

Muchas de las funciones que estudiamos se pueden expresar como la *composición* de dos funciones más sencillas. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x+1}$ se puede expresar como la composición de las funciones $\varphi(x) = x + 1$ y $\theta(x) = \sqrt{x}$.

Definición 6 *La* **composición** *de las funciones f y g (i.e. $f \circ g$) se define*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Definición 7 *El* **dominio** *de $f \circ g$ se define*

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \in D_g) \wedge (g(x) \in D_f)\}$$

EJEMPLO
Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, halla una fórmula para $f \circ g$.
SOLUCION
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$

EJEMPLO
Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Halla una fórmula para $f \circ g$ e indica su dominio.
SOLUCION
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$. Por la definición 7, $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 0$. Por lo tanto, $D_{f \circ g} = [0, \infty)$.

Comentario
Note que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$. Por lo tanto $f \circ g \neq g \circ f$.

5 Funciones inversas

Comenzaremos la discusión sobre funciones inversas definiendo unos conceptos básicos:

Definición 8 *Una función $f : A \longrightarrow B$ es* **inyectiva** *si*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

para todo $a, b \in A$.

Definición 9 *Una función $f : A \longrightarrow B$ es* **suprayectiva** *si*

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(b = f(a))$$

Definición 10 *Una función $f : A \longrightarrow B$ es* **biyectiva** *si es inyectiva y suprayectiva.*

NOTACION
Sea f una función biyectiva. Denotamos *la función inversa de* f con el símbolo f^{-1}. Debemos entender que $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

Es trivial pensar que si $f : A \longrightarrow B$, entonces $f^{-1} : B \longrightarrow A$. La relación inversa de f siempre existe, pero para que sea función, f tiene que ser una función **biyectiva**. Llamamos al subconjunto de elementos asignados en el campo de valores el **conjunto imagen** de f. En este curso, las funciones que estudiaremos tienen el **campo de valores igual al conjunto imagen**. por lo tanto, para saber si f tiene función nversa e suficiente demostrar que f es **inyectiva**.

Definición 11 *La* **función inversa** *de una función inyectiva f es una función única denotada por el símbolo f^{-1}, tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$, y tiene la propiedad*

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

EJEMPLO
Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Halla una fórmula para f^{-1}.
SOLUCION
Para saber si f tiene función inversa es necesario demostrar que f es inyectiva.
Utilizamos la definición 8 para hacer esto.
Suponemos que $f(a) = f(b)$ y demostramos que $a = b$. Así que

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{a+2} = \frac{1}{b+2} \\ &\Rightarrow \quad b+2 = a+2 \\ &\Rightarrow \quad a = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.
Ahora hallamos una fórmula para f^{-1} utilizando la propiedad de la definición 11. Como es un enunciado bi-condicional podemos trabajar con él en cualquier dirección. Vamos a utilizarlo en la dirección $\Leftarrow$.

$$\begin{aligned} f(y) = x \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y+2} = x \\ &\Rightarrow \quad x(y+2) = 1 \\ &\Rightarrow \quad xy + 2x = 1 \\ &\Rightarrow \quad xy = 1 - 2x \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{1-2x}{x} \end{aligned}$$

Como $y = f^{-1}(x)$, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{x}$.

Definición 12 *El* **dominio** *de f^{-1} es igual al campo de valores de f.*

Definición 13 *El* **campo de valores** *de f^{-1} es igual al dominio de f.*

Si unimos las definiciones 12 y 13 obtenemos

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= CV_f \\ CV_{f^{-1}} &= D_f \end{aligned}$$

6 Ejercicios de práctica

1. Si $F(x) = 3x^2 - 4$, halla

(a) $F(0)$	(d) $F(x+2)$
(b) $F(\sqrt{3})$	(e) $F(x-3)$
(c) $F(2x)$	(f) $F(x+h)$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x$
   (b) $h(x) = \frac{x}{x-2}$
   (c) $\varphi(x) = \sqrt{3x-5}$
   (d) $g(\xi) = \xi^2 - 1$
3. Si $g(x) = \frac{2}{x-2}$, ¿para qué valor de x es $g(x) = 2$?
4. Si $f(x) = 2x + 1$, ¿es $f(a) + f(b) = f(a+b)$?
5. Si $f(x) = \frac{3x+8}{2x-a}$ y $f(0) = 2$, ¿cuál es el valor de a?
6. Si $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, halla:
   (a) $f + g$
   (b) $f - g$
   (c) $f \cdot g$
   (d) $\frac{f}{g}$
7. Si $f(x) = 3x + 1$ y $(f+g)(x) = 6 - \frac{1}{2}x$, halla la función g.
8. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x + 3$ halla una fórmula para $f \circ g$ e indica su dominio.
9. Determina si $f(x) = \frac{x-5}{2x+3}$ es inyectiva.
10. Si $t(x) = 4x - 8$, determina si t es inyectiva. Si lo es, halla una fórmula para t^{-1} e indica su dominio y campo de valores.

7 Contestaciones de los ejercicios

1. (a) -4 (b) 5 (c) $12x^2-4$ (d) $3x^2+12x+8$ (e) $3x^2-18x+5$ (f) $3x^2+6xh+3h^2-4$

2. (a) $\mathbb{R}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
   (c) $[\frac{5}{3}, \infty)$
   (d) $\mathbb{R}$

3. $x = 1$

4. No

5. $a = -4$

6. (a) $\frac{x+2}{x}$
   (b) 1
   (c) $\frac{x+1}{x^2}$
   (d) $x+1$

7. $g(x) = \frac{10-7x}{2}$

8. $(f \circ g)(x) = \sqrt{2x+3}$, $D_{f \circ g} = [-\frac{3}{2}, \infty)$

9. Sí

10. Sí. $t^{-1} = \frac{x+8}{4}$. $D_{t^{-1}} = CV_{t^{-1}} = \mathbb{R}$