La función logarítmica

Alexis Vera Pérez
Instituto de Estadística & Sistemas Computarizados de Información
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Agosto 2007

Contents

1 Definición y notación

1.1 Introducción

La función exponencial con base b, $b \neq 1$ es inyectiva ya que $b^\xi = b^\eta \Rightarrow \xi = \eta$ para todo ξ, η en el dominio de la función exponencial con base b. Como es inyectiva, entonces podemos decir que tiene una función inversa a la cual llamaremos *la función logarítmica con base* b, denotada $\log_b$[1].

Definición 1 *Sea $b > 0$, $b \neq 1$. La* **función logarítmica con base** b *es la inversa de la función exponencial con base b. Esto es,*

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

[1] Cuando no tenemos una base escrita esto quiere decir que la base es 10 (i.e. $\log x = \log_{10} x$.

1.2 Identidades fundamentales

Como la función logarítmica y la función exponencial son inversas entre si siempre que las bases sean iguales entonces tenemos las siguientes identidades:

$$\log_b b^x = x \tag{1}$$
$$b^{\log_b x} = x \tag{2}$$

DEMOSTRACION DE (1)
Sea $f(x) = \log_b x$ y $g(x) = b^x$. Como f y g son inversas, sabemos que la composición de f y g tiene que ser igual a x (i.e. $f \circ g = x$). Así que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= x \\ f(g(x)) &= x \\ f\left(b^x\right) &= x \\ \log_b b^x &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto $\log_b b^x = x$.
Utilizando la misma técnica podemos demostrar (2).

EJEMPLO
Halla los siguientes logaritmos:

- $\log_2 4$
- $\log_3 \frac{1}{27}$

SOLUCION
Para evaluar los logaritmos utilizamos la definición de función logarítmica.

- $\log_2 4 = y$ si y solo si $2^y = 4$. Como $4 = 2^2$, entonces $2^y = 2^2$. Como las bases son iguales, los exponentes tienen que ser iguales. Así que $y = 2$.
- $\log_3 \frac{1}{27} = y$ si y solo si $3^y = \frac{1}{27}$. Como $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, entonces $3^y = 3^{-3}$. Por lo tanto $y = -3$.

Teorema 1 *Si $b > 0$, $b \neq 1$:*

1. *El dominio de $f(x) = \log_b x$ es el conjunto de los números reales positivos.*
2. *El campo de valores de $f(x) = \log_b x$ es el conjunto de los números reales.*
3. $\log_b 1 = 0$
4. $\log_b b = 1$
5. *Si $b > 1$, entonces la función logarítmica es creciente.*
6. *Para todo x_1 y $x_2 > 0$, $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 = \log_b x_2$.*

2 Leyes logarítmicas y fórmula de cambio de base

2.1 Leyes logarítmicas

Teorema 2 *Sea $b > 0$, $b \neq 1$. Sean a y c números reales positivos.*

1. $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$
2. $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
3. $\log_b a^c = c \log_b a$, *donde $c \in \Re$*

DEMOSTRACION PARTE 1 TEOREMA 2
Sabemos que $b^{\log_b ac} = ac$, $b^{\log_b a} = a$ y $b^{\log_b c} = c$. Entonces $b^{\log_b ac} = ac = (b^{\log_b a})(b^{\log_b c}) = b^{\log_b a + \log_b c}$. Por lo tanto $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$.

De esta misma forma podemos demostrar las partes 2 y 3 del teorema.

EJEMPLO
Escribe $\log_x \left(\frac{a^4 b}{c^2}\right)$ como una suma de logaritmos.

SOLUCION

$$\begin{aligned}\log_x\left(\frac{a^4b}{c^2}\right) &= \log_x(a^4b) - \log_x c^2 \\ &= \log_x a^4 + \log_x b - \log_x c^2 \\ &= 4\log_x a + \log_x b - 2\log_x c\end{aligned}$$

Por lo tanto $\log_x\left(\frac{a^4b}{c^2}\right) = 4\log_x a + \log_x b - 2\log_x c$.

EJEMPLO
Resuelve la ecuación $\log_{10} x = 1 - \log_{10}(x-3)$.
SOLUCION

$$\begin{aligned}\log_{10} x &= 1 - \log_{10}(x-3) \\ \log_{10} x + \log_{10}(x-3) &= 1 \\ \log_{10}[x(x-3)] &= 1 \\ 10 &= x(x-3) \\ 10 &= x^2 - 3x \\ 0 &= x^2 - 3x - 10 \\ 0 &= (x-5)(x+2)\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que $x = 5$ ó $x = -2$. Pero, como la función logarítmica está definida solo para números reales positivos, x y $x-3$ tienen que ser positivos. Así que $x > 3$. Por lo tanto descartamos -2 como solución. Entonces, la única solución para la ecuación es $x = 5$.

2.2 Fórmula de cambio de base

Teorema 3 *Sean a y b números reales positivos diferentes de 1. Para todo número real positivo x,*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

DEMOSTRACION
Sea $y = \log_b x$. Entonces $b^y = x$. Si tomamos el logaritmo con base a en amobos lados de la ecuación, obtenemos que $\log_a b^y = \log_a x$. Esto implica

que $y \log_a b = \log_a x$. Por lo tanto $y = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$. Como $y = \log_b x$, entonces $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

EJEMPLO
Evalúa $\log_8 4$.
SOLUCION
Utilizando la fórmula de cambio de base y seleccionando la base 2 tenemos que

$$\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{2}{3}$$