Manual de Ejercicios
MECU 3032

Pro. Alvilda Vega

Tabla de contenido

Tema **Página**

MECU 3032

Límites a base de tablas y gráficas

I. Complete las siguientes tablas y use los resultados para estimar los límites indicados. Si no existe alguno explique la razón.

1. $f(x) = x^2 - 3;\ \lim_{x \to 2} f(x)$

$x \to 2^-$	$f(x)$	$x \to 2^+$	$f(x)$
1.9		2.1	
1.99		2.01	
1.999		2.001	
1.9999		2.0001	

2. $g(x) = \dfrac{2}{x};\ \lim_{x \to 1} g(x)$

$x \to 1^-$	$g(x)$	$x \to 1^+$	$g(x)$
.9		1.1	
.99		1.01	
.999		1.001	
.9999		1.0001	

3. $h(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad \lim_{x \to 0^-} h(x), \lim_{x \to 0^+} h(x), \lim_{x \to 0} h(x)$

$x \to 0^-$	$h(x)$	$x \to 0^+$	$h(x)$
-.1		.1	
-.01		.01	
-.001		.001	
-.0001		.0001	

4. $k(x)=\begin{cases}2x & x<2\\ x+2 & x>2\end{cases}$ $\lim_{x\to 2^-} k(x), \lim_{x\to 2^+} k(x), \lim_{x\to 2} k(x), \lim_{x\to 0} k(x)$

$x \to 2^-$	$k(x)$	$x \to 2^+$	$k(x)$
1.9		2.1	
1.99		2.01	
1.999		2.001	
1.9999		2.0001	

$x \to 0^-$	$k(x)$	$x \to 0^+$	$k(x)$

5. $p(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$; $\lim_{x\to -1} p(x)$

$x \to -1^-$	$p(x)$	$x \to -1^+$	$p(x)$
-1.1		-.9	
-1.01		-.99	
-1.001		-.999	
-1.0001		-.9999	

6. $q(x)=\dfrac{x}{x+2}$; $\lim_{x\to -2} q(x)$

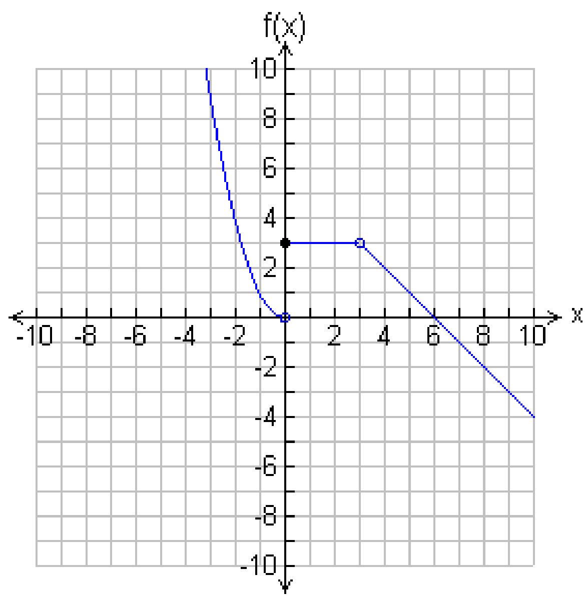
$x \to -2^-$	$q(x)$	$x \to -2^+$	$q(x)$

7. $t(x) = 2^x; \quad \lim_{x\to 3} t(x)$

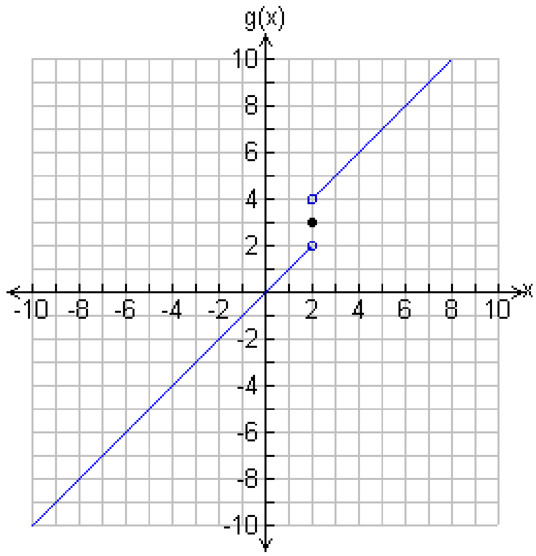
$x \to 3^-$	$t(x)$	$x \to 3^+$	$t(x)$
2.9		3.1	
2.99		3.01	
2.999		3.001	
2.9999		3.0001	

II. Halle los límites indicados a base de las siguientes gráficas. Si no existe alguno explique la razón. Use la notación $\infty, -\infty$ cuando aplique.

1. a) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
   d) $\lim_{x\to 0} f(x)$ e) $\lim_{x\to 3} f(x)$ f) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

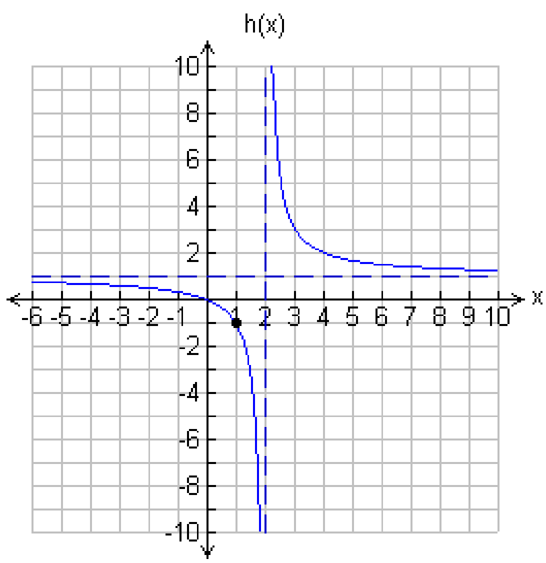


2. a) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ b) $\lim_{x \to 2} g(x)$ c) $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

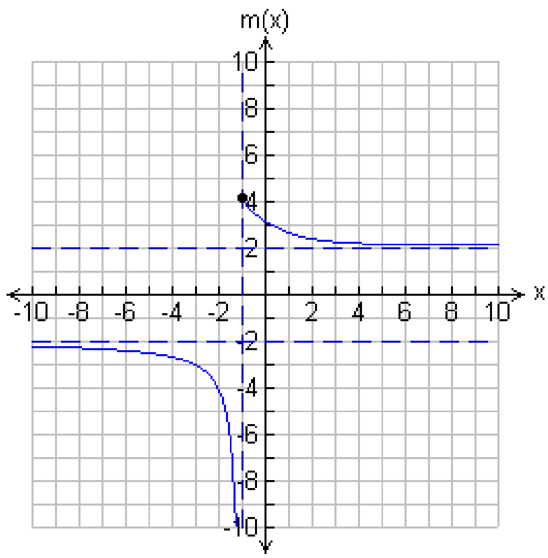


3. a) $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ b) $\lim_{x \to 1} h(x)$ c) $\lim_{x \to 2^-} h(x)$

d) $\lim_{x \to 2^+} h(x)$ e) $\lim_{x \to 2} h(x)$ f) $\lim_{x \to \infty} h(x)$



4. a) $\lim_{x\to-\infty} m(x)$ b) $\lim_{x\to-1} m(x)$ c) $\lim_{x\to0} m(x)$ d) $\lim_{x\to\infty} m(x)$



Respuestas

I. 1. $\lim_{x\to2} f(x)=1$

2. $\lim_{x\to1} g(x)=2$

3. $\lim_{x\to0^-} h(x)=-1$; $\lim_{x\to0^+} h(x)=0$; $\lim_{x\to0} h(x)$ no existe porque los unilaterales son distintos.

4. $\lim_{x\to2^-} k(x)=4$; $\lim_{x\to2^+} k(x)=4$; $\lim_{x\to2} k(x)=4$; $\lim_{x\to0} k(x)=0$

5. $\lim_{x\to-1} p(x)=-3$

6. $\lim_{x\to-2} q(x)$ no existe porque los unilaterales no existen

7. $\lim_{x\to3} t(x)=8$

II.

1. a) ∞ b) 0 c) 3
d) no existe porque los unilaterales son distintos
e) 3 f) $-\infty$

2. a) $-\infty$

b) no existe porque los unilaterales son distintos ($\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$)

c) ∞

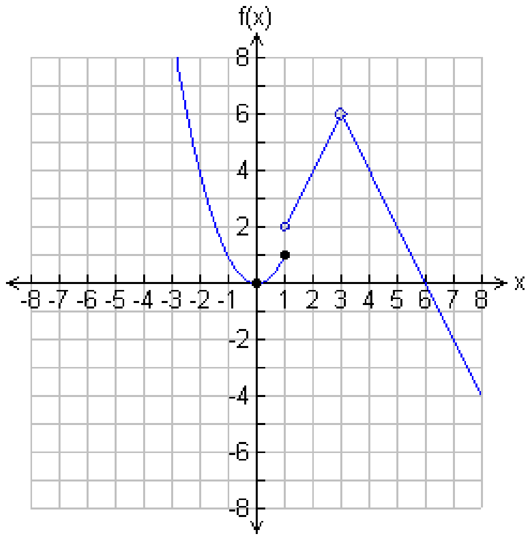
3. a) 1 b) -1 c) $-\infty$ d) ∞
   e) no existe porque los unilaterales no existen
   f) 1

4. a) -2
   b) no existe porque el límite unilateral de izquierda no existe
   c) 3
   d) 2

MECU 3032

Límites a base de gráficas

1. Haga uso de las gráficas que aparecen a continuación para hallar los límites indicados. Si no existe alguno explique la razón.



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

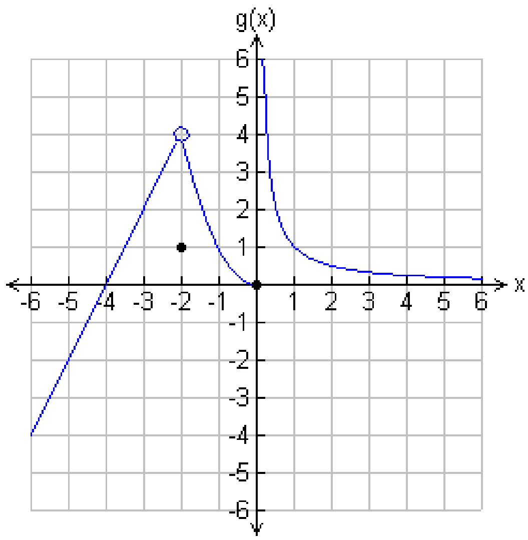
b) $\lim_{x\to 0} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

d) $\lim_{x\to 3} f(x)$

e) $\lim_{x\to 5} f(x)$

f) $\lim_{x\to \infty} f(x)$



g) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

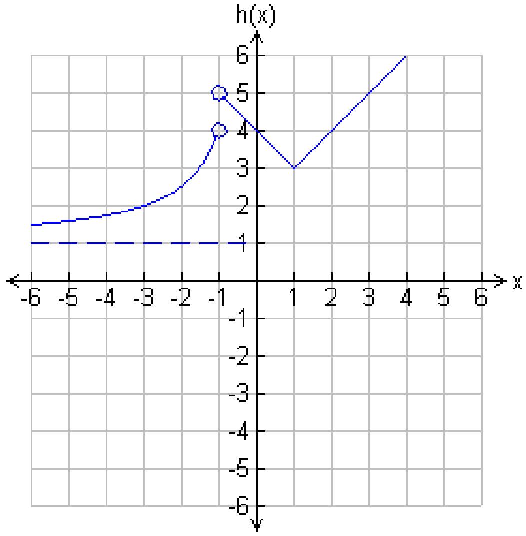
h) $\lim_{x \to -2} g(x)$

i) $\lim_{x \to 0^-} \mathrm{g(x)}$

j) $\lim_{x \to 0^+} g(x)$

k) $\lim_{x \to 0} g(x)$

l) $\lim_{x \to \infty} g(x)$



m) $\lim_{x\to-\infty} h(x)$

n) $\lim_{x\to-1^-} h(x)$

o) $\lim_{x\to-1^+} h(x)$

p) $\lim_{x\to-1} h(x)$

q) $\lim_{x\to1} h(x)$

r) $\lim_{x\to\infty} h(x)$

2. Trace la gráfica de una **función** que cumpla con las siguientes condiciones:

a) $f(-2)=1$, $f(0)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to-2^+} f(x)=3$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

b) $g(0)=3$, $g(1)$ no está definido, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to1} g(x)=5$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=2$

Respuestas

1.

a) ∞

b) 0

c) no existe porque $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

d) 6

e) 2

f) $-\infty$

g) $-\infty$

h) 4

i) 0

j) ∞

k) no existe porque $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ no existe

l) 0

m) 1

n) 4

o) 5

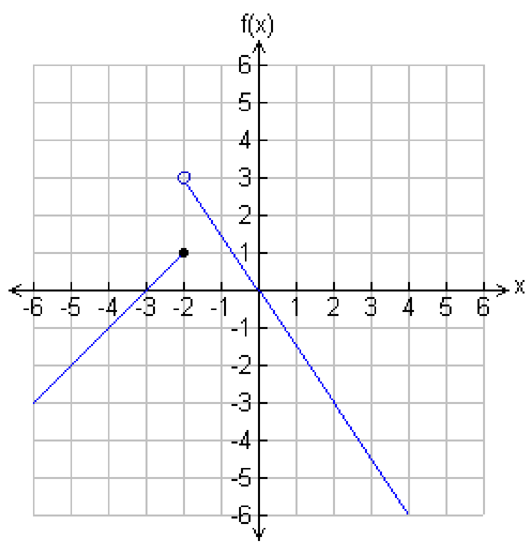
p) no existe porque los límites unilaterales son diferentes

q) 3

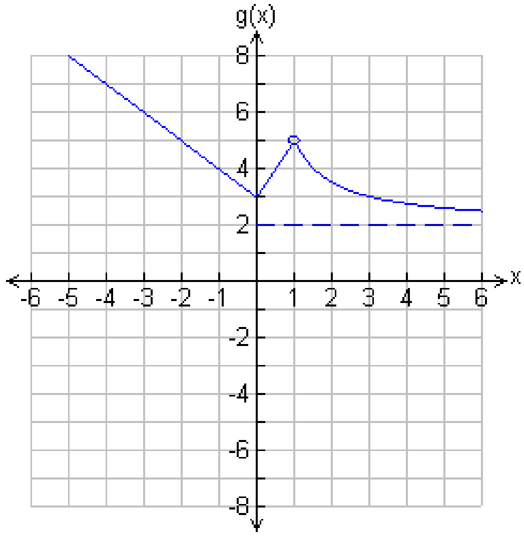
r) ∞

2. Hay más de una respuesta posible.

a)



b)



MECU 3032

Propiedades de los límites

1. Halle los límites indicados haciendo uso de las propiedades de los límites.
   a) $\lim_{x\to -4} 8$
   b) $\lim_{x\to 3} x^4$
   c) $\lim_{t\to -1}(2t^3 - 4t + 2)$
   d) $\lim_{r\to 1/2}(r^2 - 1)$
   e) $\lim_{q\to -3}[(q+4)(2q-1)]$
   f) $\lim_{y\to 4} \frac{2y-3}{y+5}$
   g) $\lim_{p\to -2} \frac{p^2-4}{3p}$
   h) $\lim_{h\to 5} \sqrt{2h-1}$
   i) $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x} + 3)$
   j) $\lim_{y\to 3} \frac{y^2-3y}{y-3}$
   k) $\lim_{r\to -2} \frac{3r^2+5r-2}{2r+4}$
   l) $\lim_{t\to -1} \frac{2t^2-t-3}{t^2-t-2}$
   m) $\lim_{v\to 0} \frac{v^4-v^3}{v}$

2. Halle los límites indicados para las siguientes funciones partidas. Si no existe alguno explique la razón.
   a) $f(x) = \begin{cases} 3 & x \le 1 \\ 2x-3 & x > 1 \end{cases}$

   $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) $g(x)=\begin{cases} 2x & x<2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-} g(x)$ $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ $\lim_{x\to 2} g(x)$

c) $h(x)=\begin{cases} 3x-1 & x<0 \\ x^2-x & x\geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to -2} h(x)$ $\lim_{x\to 0} h(x)$ $\lim_{x\to 3} h(x)$

Respuestas

1. a) 8
   b) 81
   c) 4
   d) -3/4
   e) -7
   f) 5/9
   g) 0
   h) 3
   i) 4
   j) 3
   k) -7/2
   l) 5/3
   m) 0

2. a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 3=3$
   $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x-3)=-1$
   $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe porque los unilaterales son diferentes

   $\lim_{x\to 2^-} g(x)=\lim_{x\to 2^-} 2x=4$
   b) $\lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2=4$
   $\lim_{x\to 2} g(x)=4$

c) $\lim_{x\to -2} h(x) = \lim_{x\to -2}(3x-1) = -7$

$\lim_{x\to 0} h(x)$ no existe porque $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$

$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - x) = 6$

MECU 3032

Límites al infinito y límites infinitos

1. Halle los siguientes límites al infinito. Use la notación de $\infty, -\infty$ cuando sea posible.
   a) $\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 2x + 1)$
   b) $\lim_{x \to \infty} (3x - x^2)$
   c) $\lim_{x \to \infty} \frac{6}{x^5}$
   d) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x + 5}$
   e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{8x}{x^2 + 3}$
   f) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x - 2}$
   g) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - 4x^2}{5x^2 + 1}$
   h) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 1}{1 - 2x}$
   i) $\lim_{x \to -\infty} (\frac{1}{x} - 5)$

2. Halle los siguientes límites. Use la notación de $\infty, -\infty$ cuando sea posible.
   a) $\lim_{x \to 3^-} \frac{5}{x - 3}$
   b) $\lim_{x \to -2^+} \frac{3x}{x + 2}$
   c) $\lim_{x \to 4^+} \frac{x - 6}{2x - 8}$
   d) $\lim_{x \to -1^-} \frac{5x - 4}{3x + 3}$
   e) $\lim_{x \to 0} \frac{8}{x^4}$
   f) $\lim_{x \to 3} \frac{2x + 1}{x - 3}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x}{x-1}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\dfrac{1}{x} - 5)$

3. Si $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{x} & x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$ halle los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

Respuestas

1. a) ∞
   b) $-\infty$
   c) 0
   d) 2
   e) 0
   f) ∞
   g) $-\dfrac{4}{5}$
   h) $-\infty$
   i) -5

2. a) $-\infty$
   b) $-\infty$
   c) $-\infty$
   d) ∞

e) ∞
f) No existe porque los valores funcionales aumentan o decrecen sin control.
g) No existe porque los valores funcionales aumentan o decrecen sin control.
h) ∞

3. a) 0
b) $\frac{3}{2}$
c) ∞
d) 0
e) no existe porque $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ no existe.
f) 1

MECU 3032

Ejercicios adicionales de límite

Haga uso de las propiedades de límite para hallar los siguientes límites. Si no existe alguno explique la razón. Use la notación ∞ o $-\infty$ cuando sea apropiado.

1. $\lim_{x\to 0}(-\frac{4}{x^2})$
2. $\lim_{x\to -\infty}(-\frac{4}{x^2})$
3. $\lim_{y\to -2^+}\frac{5}{y+2}$
4. $\lim_{q\to 4^-}(-\frac{3}{q-4})$
5. $\lim_{t\to 4^+}(\frac{t+2}{t-4})$
6. $\lim_{t\to 0}\frac{3t+2}{t-5}$
7. $\lim_{t\to \infty}\frac{3t+2}{t-5}$
8. $\lim_{p\to -3^-}\frac{2p-5}{p+3}$
9. $\lim_{p\to -\infty}\frac{2p-5}{p+3}$
10. $\lim_{p\to 1}\frac{2p-5}{p+3}$
11. $\lim_{q\to 0}\frac{2q^2-5q-3}{q-3}$
12. $\lim_{q\to 3^+}\frac{2q^2-5q-3}{q-3}$
13. $\lim_{q\to -\infty}\frac{2q^2-5q-3}{q-3}$
14. $\lim_{x\to 3}\frac{5x-2}{x-3}$
15. $\lim_{y\to 1}\frac{2y+3}{y^2-1}$
16. $\lim_{y\to -\infty}\frac{2y+3}{y^2-1}$
17. $\lim_{z\to 5}\frac{z-5}{5-z}$
18. $\lim_{v\to 0^-}(8v-\frac{1}{v})$
19. $\lim_{v\to 0^+}(8v-\frac{1}{v})$
20. $\lim_{v\to \infty}(8v-\frac{1}{v})$
21. $\lim_{m\to -\infty}(6+\frac{1}{m^2})$
22. $\lim_{m\to 0}(6+\frac{1}{m^2})$
23. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-15x}{x^4-5x^3-12x^2}$
24. $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-2x^2-15x}{x^4-5x^3-12x^2}$

Respuestas

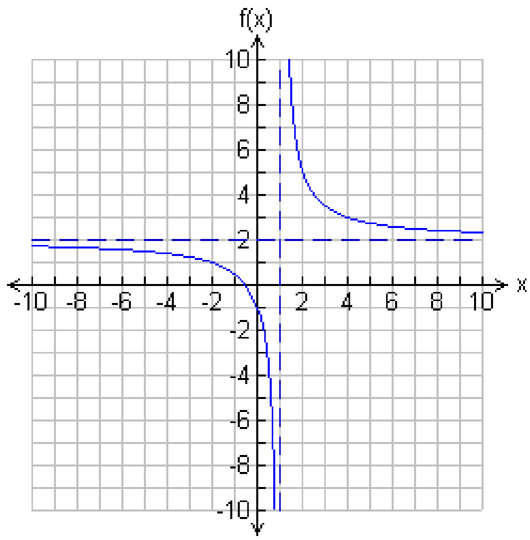
1. $-\infty$
2. 0
3. ∞
4. ∞
5. ∞
6. $-\frac{2}{5}$
7. 3
8. ∞
9. 2
10. $-\frac{3}{4}$
11. 1
12. 7
13. $-\infty$
14. no existe porque hay tendencia a $\pm\infty$
15. no existe porque hay tendencia a $\pm\infty$
16. 0
17. -1
18. ∞
19. $-\infty$
20. ∞
21. 6
22. ∞
23. 1
24. $-\infty$

MECU 3032

Asíntotas

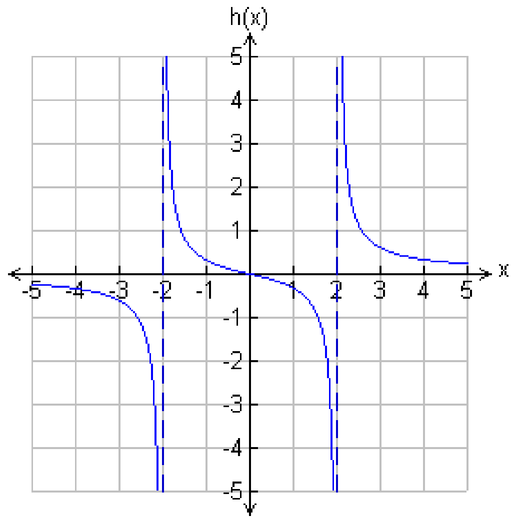
I. Conteste a base de las siguientes gráficas.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$



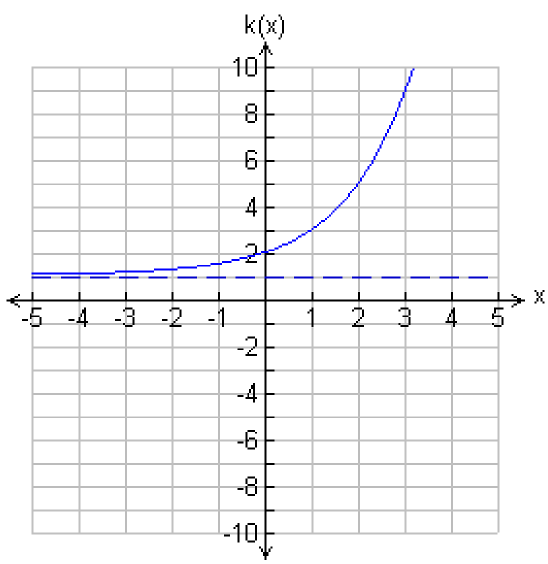
a) ¿Cuál es el dominio de esta función?
b) ¿Cuál es la ecuación de la asíntota vertical?
c) ¿Qué ocurre con los valores funcionales a medida que x se aproxima a la asíntota vertical?
d) ¿Cuáles son los límites que indican la presencia de esta asíntota?
e) ¿Cuál es el recorrido de esta función?
f) ¿Cuál es la ecuación de la asíntota horizontal?
g) ¿Qué ocurre con los valores funcionales a medida que x aumenta o disminuye cada vez más?
h) ¿Cuáles son los límites que indican la presencia de esta asíntota?

2. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$



a) ¿Cuál es el dominio de esta función?
b) ¿Cuál es la ecuación de las asíntotas verticales?
c) ¿Cuáles son los límites que indican la presencia de estas asíntotas?
d) ¿Cuál es el recorrido de esta función?
e) ¿Cuál es la ecuación de la asíntota horizontal?
f) ¿Cuáles límites indican la presencia de esta asíntota?

3. $k(x) = 2^x + 1$



a) ¿Cuál es el dominio de la función?
b) ¿Hay asíntota vertical?
c) ¿Cuál es el recorrido de la función?
d) ¿Cuál es la ecuación de la asíntota horizontal?
e) ¿Cuál límite está asociado a esta asíntota?

II. Utilice el concepto de límite para demostrar que las siguientes funciones tienen asíntotas en los valores dados.

1. $f(x) = \dfrac{4x}{x-2}$; Asíntota vertical en $x = 2$, asíntota horizontal en $y = 4$.

2. $g(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$; Asíntota vertical en $x = 0$, asíntota horizontal en $y = 0$.

3. $k(x) = 3^x - 2$; Asíntota horizontal en $y = -2$.

III. Halle las asíntotas de las siguientes funciones. Utilice el concepto de límite para demostrarlo.

1. $F(x) = \dfrac{3x-2}{2x+1}$
2. $G(x) = \dfrac{x^2+x}{x^3-1}$
3. $H(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1}$
4. $K(x) = (\frac{1}{2})^x + 3$

IV. Demuestre que la función $p(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ no tiene asíntota vertical ni horizontal. Haga uso del concepto de límite.

Respuestas

I.

1. a) $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$
   b) $x=1$
   c) Los valores funcionales aumentan o decrecen cada vez más.
   d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty.$
   e) $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$
   f) $y=2$
   g) Se aproximan cada vez más a 2.
   h) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=2$

2. a) $\Re \neq \pm 2$
   b) $x=-2, x=2$
   c) $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} h(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\infty$
   d) $\Re \neq 0$
   e) $y=0$
   f) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=0$; $\lim\limits_{x\to \infty} h(x)=0$

3. a) $(-\infty,\infty)$
   b) No
   c) $(1,\infty)$
   d) $y=1$
   e) $\lim\limits_{x\to -\infty} k(x)=1$

II.

1. Asíntota vertical: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\infty$ ó $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$
   Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=4$ ó $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=4$
2. Asíntota vertical: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ ó $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$
   Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} g(x)=0$
3. Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to -\infty} k(x)=-2$

III.

1. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} F(x)=-\infty$; $x=-\dfrac{1}{2}$ es asíntota vertical

   $\lim\limits_{x\to \infty} F(x)=\dfrac{3}{2}$; $y=\dfrac{3}{2}$ es asíntota horizontal

2. $\lim_{x\to 1^+} G(x) = \infty$; $x = 1$ es asíntota vertical
$\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$; $y = 0$ es asíntota horizontal

3. No hay asíntota vertical pues no hay valor de x que haga cero el denominador. $\lim_{x\to\pm\infty} H(x) = \infty$; no hay asíntota horizontal

4. Función exponencial; no hay asíntota vertical.
$\lim_{x\to\infty} K(x) = 3$; $y = 3$ es asíntota horizontal.

IV. $p(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = x - 2$ si $x \neq -2$.

$\lim_{x\to -2} p(x) = -4$; no hay asíntota vertical.
$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$; $\lim_{x\to -\infty} p(x) = -\infty$; no hay asíntota horizontal.

MECU 3032

Interés Continuo

1. Se invierten \$15,000 durante 5 años.
   a) Halle la cantidad acumulada si la tasa de interés es del 6% anual capitalizado mensualmente.
   b) Halle la cantidad acumulada si la tasa de interés es del 6% anual capitalizado continuamente.

2. Halle el monto de una inversión de \$20,000 a una tasa de interés continuo del 5 ½ % anual por 4 años. Halle, además, los intereses recibidos.

3. ¿Qué cantidad se debe depositar en un fondo que paga un interés continuo del 8 ¼ % anual para tener un total de \$25,000 al cabo de 6 años?

4. El Sr. Vélez desea contar con \$10,000 dentro de 4 años para darse un viaje a Europa junto a su esposa. ¿Qué cantidad debe depositar en un fondo que paga un interés continuo del 7% anual?

Respuestas

1. a) $S = 15{,}000(1.005)^{60} = \$20{,}232.75$

   b) $S = 15{,}000e^{(.06)5} = \$20{,}247.88$

2. $S = 20{,}000e^{(.055)4} = \$24{,}921.53$
   Intereses: \$4,921.53

3. $P = 25{,}000e^{-(.0825)6} = \$15{,}239.27$

4. $P = 10{,}000e^{-(.07)4} = \$7{,}557.84$

MECU 3032

Continuidad

1. Haga uso de la definición de continuidad en un punto para demostrar que las siguientes funciones son continuas en el valor dado.

   a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 3; \;\; x = 2$

   b) $g(x) = \dfrac{4x-3}{5x+1}; \;\; x = -1$

   c) $h(x) = \begin{cases} -3 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}; \;\; x = 3$

2. Haga uso de la definición de continuidad para determinar los valores de x para los cuales las siguientes funciones son discontinuas.

   a) $F(x) = \dfrac{x+5}{2x}$

   b) $G(x) = \dfrac{6x-5}{x^2 - 3x - 4}$

   c) $H(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 1}$

   d) $P(x) = \begin{cases} -3 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

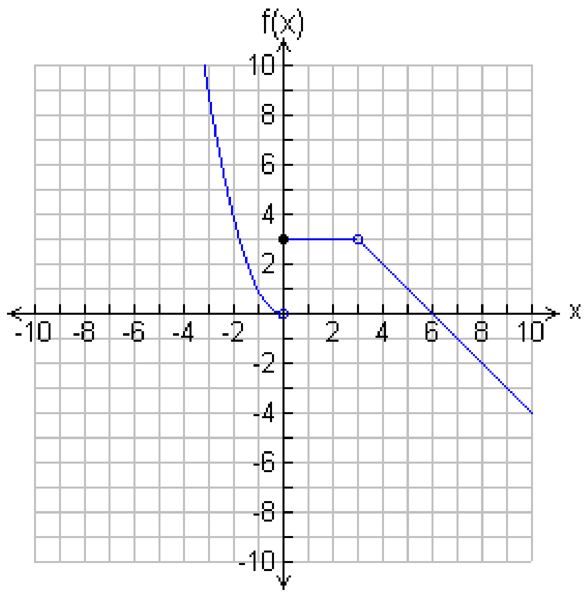
   e) $Q(x) = \begin{cases} 4x-3 & x < 1 \\ 2x-1 & x \ge 1 \end{cases}$

   f) $R(x) = \begin{cases} x+5 & x = -2 \\ x^3 & x \ne -2 \end{cases}$

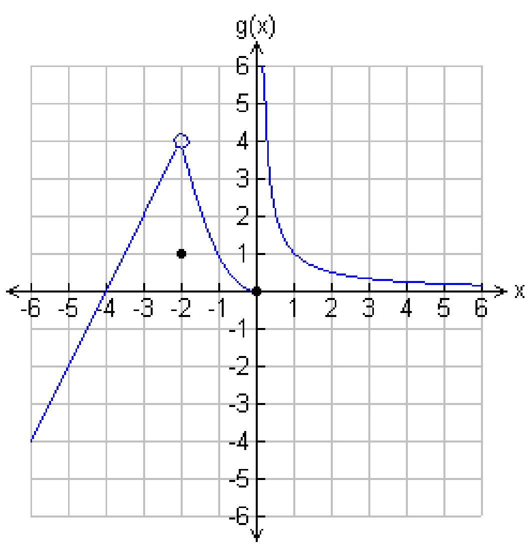
   g) $T(x) = \begin{cases} 5 & x = 1 \\ \dfrac{1}{x+1} & x < 1 \\ \dfrac{x}{x+1} & x > 1 \end{cases}$

3. Determine todos los valores de x para los cuales las siguientes funciones son discontinuas. Demuestre haciendo uso de la definición de continuidad.

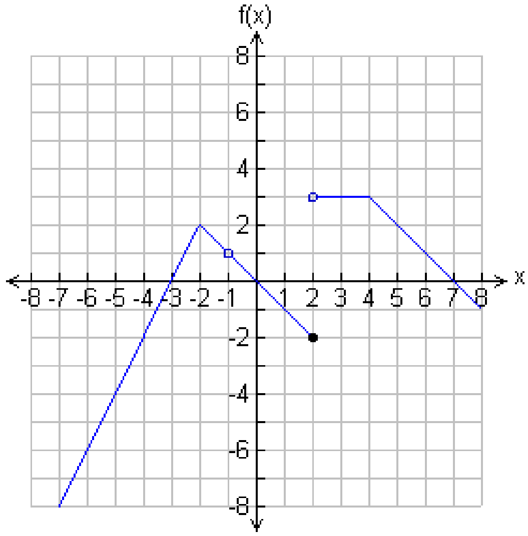
a)



b)



c)



Respuestas

1. a)

$$f(2) = 2^3 + 4(2)^2 - 2 + 3 = 25$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2^3 + 4(2)^2 - 2 + 3 = 25$$

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$ es continua en $x = 2$

b)

$$g(-1) = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \to -1} g(x) = \frac{\lim_{x \to -1}(4x-3)}{\lim_{x \to -1}(5x+1)} = \frac{7}{4}$$

$$g(-1) = \lim_{x \to -1} g(x)$$

$\therefore g(x)$ es continua en $x = -1$

c)

$$h(3) = 3^2 = 9$$
$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3} x^2 = 9$$
$$h(3) = \lim_{x\to 3} h(x)$$
$\therefore h(x)$ es continua en $x = 3$

2. a) $F(x)$ es discontinua en $x = 0$ porque $F(0)$ no está definido.
   b) $G(x)$ es discontinua en $x = -1, x = 4$ porque $G(-1), G(4)$ no están definidos.
   c) $H(x)$ es discontinua en $x = \pm 1$ porque $H(-1), H(1)$ no están definidos.
   d) $P(x)$ es discontinua en $x = 0$ porque $P(0) = -3,$ pero $\lim_{x\to 0} P(x)$ no existe porque $\lim_{x\to 0^-} P(x) = -3 \neq \lim_{x\to 0^+} P(x) = 0$

   e) $Q(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$. No hay discontinuidad.

   f) $R(x)$ es discontinua en $x = -2$:
   $$R(-2) = 3$$
   $$\lim_{x\to -2} R(x) = (-2)^3 = -8$$
   $$\therefore R(-2) \neq \lim_{x\to -2} R(x)$$

   g) $T(x)$ es discontinua en $x = 1$:
   $$T(1) = 5$$
   $$\lim_{x\to 1} T(x) = \frac{1}{2}$$
   $$\therefore T(1) \neq \lim_{x\to 1} T(x)$$

3. a) $f(x)$ es discontinua en $x = 0$ porque $f(0) = 3,$ pero $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe ($\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$).
   $f(x)$ es discontinua en $x = 3$ porque $f(3)$ no existe.

   b) $g(x)$ es discontinua en $x = -2$ porque $g(-2) = 1 \neq \lim_{x\to -2} g(x) = 4$.
   $g(x)$ es discontinua en $x = 0$ porque g(0)=0, pero $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe($\lim_{x\to 0^+} g(x)$ no existe).

   c) $f(x)$ es discontinua en $x = -1$ porque $f(-1)$ no existe.
   $f(x)$ es discontinua en $x = 2$ porque $f(2) = -2,$ pero $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe ($\lim_{x\to 2^-} f(x) = -2 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$).

MECU 3032

Diferenciabilidad

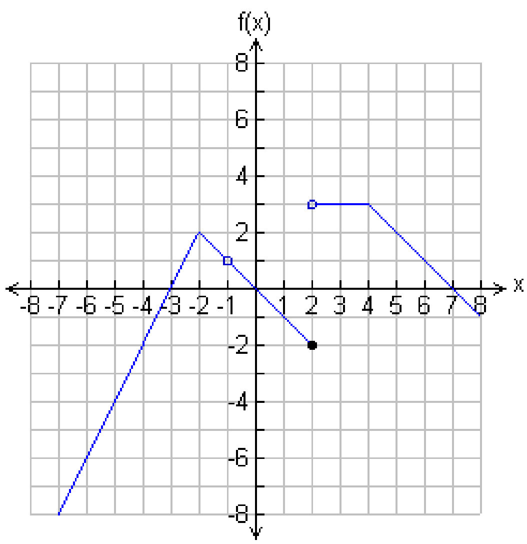
1. Haga uso de la definición de derivada para hallar la derivada de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = -8$
   b) $g(x) = 4 - 7x$
   c) $h(x) = 3x^2 + 2x$
   d) $m(x) = \dfrac{2}{5x}$

2. Si $P(x) = x^2 - 3x + 5$:
   a) Use la definición de derivada para hallar $P'(1)$.
   b) ¿Qué interpretación geométrica se le puede dar al resultado anterior?
   c) ¿Es $P(x)$ diferenciable en $x = 1$? Explique.

3. Determine si $m(x) = \dfrac{2}{5x}$ (ejercicio 1 d) es diferenciable en $x = 0$. Explique.

4. Determine todos los valores de x para los cuales la siguiente función no es diferenciable. Explique.



Respuestas

1. a) $f'(x) = 0$
   b) $g'(x) = -7$
   c) $h'(x) = 6x + 2$
   d) $m'(x) = -\dfrac{2}{5x^2}$

2. a) $P'(1) = -1$
   b) La recta tangente a $P(x)$ tiene una pendiente de -1 en el punto (1,3) ó $P(x)$ tiene una pendiente de -1 cuando $x = 1$.
   c) Si porque $P'(1)$ está definido.

3. $m(x)$ **no** es diferenciable en $x = 0$ porque $m'(0)$ no existe.

4. $f(x)$ no es diferenciable en $x = -1, x = 2$ porque no es continua en estos valores. $f(x)$ tampoco es diferenciable en $x = -2, x = 4$ porque no existe una recta tangente a $f(x)$ en estos puntos.

MECU 3032

Ejercicios de repaso para el primer examen

1. Halle los siguientes límites haciendo uso de las propiedades de límite. Si no existe alguno explique la razón.

   a) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x-3}{x^2-2x-3} \right)$

   b) $\lim_{x \to 0} \sqrt{5x^2+9}$

   c) $\lim_{y \to -\infty} \frac{y^2-2y^3}{y^2+1}$

   d) $\lim_{y \to 5^-} \frac{y-8}{y-5}$

   e) $\lim_{z \to 0^+} (5z - \frac{1}{z})$

   f) $\lim_{z \to \infty} (3 + \frac{z}{z-2})$

2. Determine la asíntota horizontal y vertical de $f(x) = \frac{x^4 - x^3}{x^2-1}$. Haga uso del concepto de límite para demostrarlo.

3. Si $F(x) = \begin{cases} 1-x & x < 3 \\ x^2+2 & x \geq 3 \end{cases}$ halle los siguientes límites haciendo uso de las propiedades de límite.

   a) $\lim_{x \to -\infty} F(x)$

   b) $\lim_{x \to 0} F(x)$

   c) $\lim_{x \to 3} F(x)$

   d) $\lim_{x \to \infty} F(x)$

4. Determine los valores para los cuales las siguientes funciones son discontinuas. Demuestre haciendo uso de la definición de continuidad en un punto.

   a) $f(x) = \frac{x-5}{x^2-3x-10}$

   b) $g(x) = \{ \begin{matrix} 3x-5 & x \leq 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{matrix}$

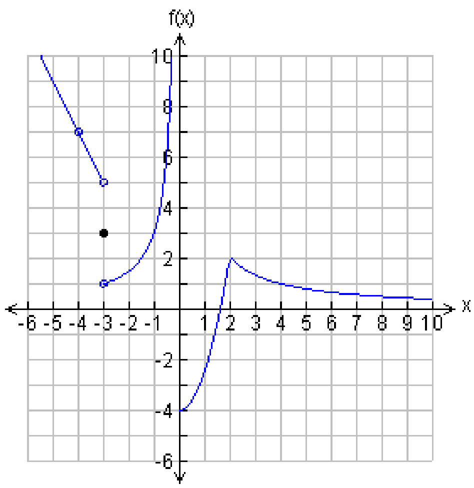
c) $h(x) = \begin{cases} x+4 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ \dfrac{-3}{x-3} & x \geq 0 \end{cases}$

5. Halle la derivada de $G(x) = 2x^2 - 5x - 3$, haciendo uso de la definición. ¿Es esta función diferenciable en $x = 2$? ¿Por qué?

6. En el ejercicio anterior, ¿qué interpretación geométrica se le puede dar a $G'(0)$?

7. Conteste a base de la siguiente gráfica de $y = f(x)$.



a) Halle los siguientes límites. Si no existe alguno explique la razón.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
2) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$	5) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
3) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$	6) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

b) Halle todos los valores de x para los cuales la función no es continua. Demuestre haciendo uso de la definición de continuidad en un punto.

c) Halle todos los valores de x para los cuales esta función no es diferenciable. Explique la razón.

Respuestas

1. a) ¼
   b) 3
   c) ∞
   d) ∞
   e) $-\infty$
   f) 4

2. No tiene asíntota horizontal porque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$.

   Tiene asíntota vertical en $x=-1$ porque $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\infty$

3. a) $\lim_{x\to-\infty} F(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)=\infty$
   b) $\lim_{x\to 0}(1-x)=1$
   c) no existe porque $\lim_{x\to 3^-} F(x)=\lim_{x\to 3^-}(1-x)=-2\neq\lim_{x\to 3^+} F(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^2+2)=11$
   d) $\lim_{x\to\infty}(x^2+2)=\infty$

4. a) $f(x)$ es discontinua en x = 5, x = -2 porque f (5) y f (-2) no existen.
   b) $g(x)$ es discontinua en x = 0: g (0) = -5, pero $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe porque $\lim_{x\to 0^-} g(x)=-5\neq\lim_{x\to 0^+} g(x)=1$.
   c) $h(x)$ es continua para todo valor real.
   d) $k(x)$ es discontinua en x = 3 porque k (3) no existe.

5. $G'(x)=4x-5$. Como $G'(2)$ está definida, $G(x)$ es diferenciable en x = 2.

6. $G'(0)=-5$. Esto implica que la pendiente de la recta tangente a la curva $G(x)=2x^2-5x-3$ en el punto donde $x=0$, es –5. También se puede decir que $G(x)$ tiene pendiente de –5 en el punto donde $x=0$.

7. a)
   1) ∞
   2) 7
   3) no existe porque $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 5 \neq \lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$
   4) no existe porque $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ no existe
   5) 2
   6) 0

7 b) $y = f(x)$ no es continua en $x = -4$ porque $f(-4)$ no existe. No es continua en $x = -3$ porque aunque $f(-3) = 3$, $\lim_{x\to -3} f(x)$ no existe. Tampoco es continua en $x = 0$ porque aunque $f(0) = -4$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

7 c) No es diferenciable en $x = -4, -3$ y 0 porque no es continua en estos valores. No es diferenciable en $x = 2$ porque no existe una recta tangente en este punto.

MECU 3032

Reglas básicas de diferenciación

Halle la derivada de las siguientes funciones haciendo uso de las reglas básicas de diferenciación.

1. $f(x) = 25$
2. $f(t) = t^{12}$
3. $f(h) = h^{.08}$
4. $f(q) = -5q^6$
5. $f(a) = 6\sqrt{a}$
6. $g(x) = \dfrac{3}{4x^5}$
7. $g(t) = \sqrt{7}$
8. $g(h) = \dfrac{1}{6}h^{-2}$
9. $g(q) = -\dfrac{4}{5\sqrt{q}}$
10. $g(a) = 7a^5 + 8a - 9$
11. $F(x) = 2x^{-5} - 3x^{-3}$
12. $F(t) = \dfrac{6}{t^2} + \dfrac{3}{t}$
13. $F(h) = \dfrac{2}{3}h^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{4}h^{\frac{1}{2}}$
14. $F(q) = (2q-5)(3q+2)$
15. $F(a) = (4a-3)^2$
16. $G(x) = x^3(2x^5 - 3x^2 - 1)$
17. $G(h) = \dfrac{4h^5 - 3h}{5}$
18. $G(t) = \dfrac{t^6 - t^4 - t^2}{t}$

Respuestas

1. $f'(x) = 0$
2. $f'(t) = 12t^{11}$
3. $f'(h) = .08h^{-.92}$
4. $f'(q) = -30q^5$
5. $f'(a) = 3a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{a}}$
6. $g'(x) = -\dfrac{15}{4x^6}$
7. $g'(t) = 0$
8. $g'(h) = -\dfrac{1}{3}h^{-3}$
9. $g'(q) = \dfrac{2}{5\sqrt{q^3}}$
10. $g'(a) = 35a^4 + 8$
11. $F'(x) = -10x^{-6} + 9x^{-4}$
12. $F'(t) = -\dfrac{12}{t^3} - \dfrac{3}{t^2}$
13. $F'(h) = \dfrac{2}{9}h^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{1}{8}h^{-\frac{1}{2}}$
14. $F'(q) = 12q - 11$
15. $F'(a) = 32a - 24 = 8(4a - 3)$
16. $G'(x) = 16x^7 - 15x^4 - 3x^2$
17. $G'(h) = \dfrac{20h^4 - 3}{5}$
18. $G'(t) = 5t^4 - 3t^2 - 1$

MECU 3032

Derivadas de productos y cocientes

Halle la derivada de las siguientes funciones. Haga uso de las reglas de producto o cociente.

1. $f(x) = 2x^3(x^5 - 3x^4 + 5x - 6)$

2. $f(z) = (3z - 4)(z^3 - 1)$

3. $f(a) = (2a - 3)(3a^2 - 5a + 1)$

4. $f(h) = \dfrac{7}{9h - 5}$

5. $f(k) = \dfrac{6k - 5}{2k + 7}$

6. $f(m) = \dfrac{m^5}{m^3 + 4}$

7. $f(p) = \dfrac{2 - 3p}{3p^2 - 5p + 1}$

8. $f(r) = \dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{r} + 1}$

Respuestas

1. $f'(x) = 2x^2(8x^5 - 21x^4 + 20x - 18)$

2. $f'(z) = 3(4z^3 - 4z^2 - 1)$

3. $f'(a) = 18a^2 - 38a + 17$

4. $f'(h) = -\dfrac{63}{(9h-5)^2}$

5. $f'(k) = \dfrac{52}{(2k+7)^2}$

6. $f'(m) = \dfrac{2m^7 + 20m^4}{(m^3+4)^2} = \dfrac{2m^4(m^3+10)}{(m^3+4)^2}$

7. $f'(p) = \dfrac{9p^2 - 12p + 7}{(3p^2 - 5p + 1)^2}$

8. $f'(r) = \dfrac{1}{2\sqrt{r}(\sqrt{r}+1)^2}$

MECU 3032

Razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo

Para $y = f(x) = x^2 + x$:

1. Halle la razón de cambio promedio de y respecto a x en los intervalos [2, 3], [2, 2.5], [2, 2.25], [2, 2.1], [2, 2.01].

2. A base de los resultados anteriores, ¿cuál el límite de la razón de cambio promedio en el intervalo [2, 2+h] si h se aproxima a cero?

3. Halle la razón de cambio de y respecto a x.

4. Halle la razón de cambio de y respecto a x cuando x = 2. Interprete su resultado.

5. Determine el cambio **real** en y cuando x aumenta de 2 a 3.

6. **Estime** el cambio en y cuando x aumenta de 3 a 3.5.

7. Determine el cambio **real** en y cuando x aumenta de 3 a 3.5.

Respuestas

1. r.c.p.[2,3] = 6, r.c.p.[2, 2.5] = 5.5, r.c.p.[2, 2.25] = 5.25, r.c.p.[2,2.1] = 5.1, r.c.p.[2,2.01] = 5.01

2. $\lim_{h \to 0} r.c.p.[2,2+h] = 5$

3. $f'(x) = 2x + 1$

4. $f'(2) = 5$ Cuando x aumenta de 2 a 3, “y” aumenta aproximadamente 5 unidades.

5. $\Delta y[2,3] = 12 - 6 = 6$ (“y” aumenta 6 unidades cuando x aumenta de 2 a 3).

6. $\Delta y \approx f'(3) \bullet \Delta x \approx 7 \bullet (.5) \approx 3.5$ (“y”aumenta aproximadamente 3.5 unidades)

7. $\Delta y[3,3.5] = f(3.5) - f(3) = 15.75 - 12 = 3.75$ (“y”aumenta exactamente 3.75 unidades).

MECU 3032

Aplicaciones de razón de cambio

1. Si $C(x)=4x+2500$ y $R(x)=12x-.001x^2$:

   a. Halle la función de ganancia ($P(x)$), donde $P(x)=R(x)-C(x)$.
   b. Halle la función de ganancia marginal.
   c. Halle la ganancia marginal cuando el nivel de producción y ventas es de 1000 unidades y de 5000 unidades. Interprete los resultados.

2. El costo total en dólares de fabricar x cámaras digitales está dado por la función $C(x) = -.04x^2+80x+1500$.

   a. Halle la función de costo marginal.
   b. Halle el costo marginal cuando se han fabricado 100 unidades. Interprete.
   c. Halle el costo real de fabricar la unidad # 101.
   d. Estime el costo de fabricar la unidad # 205.

3. Suponga que la ganancia diaria $P(x)$ de cierta tienda de discos al vender cierto disco compacto a un precio de x dólares está dada por: $P(x)=-x^2+34x-50$, $10 \le x \le 20$.

   a. Determine la ganancia al vender el disco a un precio de $12.00.
   b. Determine la razón de cambio promedio en la ganancia cuando el precio del disco aumenta de $12.00 a $15.00. Interprete.
   c. Determine la función de ganancia marginal. Halle $P'(12)$ e interprete el resultado.
   d. Halle el cambio real en la ganancia cuando el precio del disco aumenta de $12.00 a $13.00.
   e. Estime el cambio en la ganancia cuando el precio del disco aumenta de $12.00 a $12.25.
   f. Halle el cambio real en la ganancia cuando el precio del disco aumenta de $12.00 a $12.25.

4. Las ventas anuales ($S(x)$), en miles de dólares, de cierta compañía están dadas por la función $S(x)=-.001x^3+.5x^2+300$ $(0 \le x \le 350)$ donde x representa la cantidad que la compañía invierte en publicidad, en miles de dólares.

   a. Halle la razón de cambio de las ventas con respecto a la cantidad invertida en publicidad.
   b. Halle la razón de cambio de las ventas cuando la cantidad invertida en publicidad es de $200,000.

c. Halle la razón de cambio de las ventas cuando la cantidad invertida en publicidad es de $300,000.
d. Compare los resultados de las partes b y c. ¿Cuándo están las ventas aumentando a un ritmo más rápido?
e. Halle las ventas anuales de esta compañía cuando se invierten $200,000 y cuando se invierten $300,000 en publicidad.

Respuestas

1.

a. $P(x) = -.001x^2 + 8x - 2500$

b. $P'(x) = -.002x + 8$

c. $P'(1000) = 6 \qquad P'(5000) = -2$

La ganancia aumenta aproximadamente $6 cuando el nivel de producción y ventas aumenta de 1000 a 1001 unidades. La ganancia disminuye aproximadamente $2 cuando el nivel de producción y ventas aumenta de 5000 a 5001 unidades.

2.

a. $C'(x) = -.08x + 80$.

b. $C'(100) = 72$ El costo total aumenta aproximadamente $72 cuando el nivel de producción aumenta de 100 a 101 unidades (costo aproximado de la unidad 101).

c. C (101) – C (100) = 71.96 Costo real de $71.96.

d. $C'(204) = 63.68$ Cuesta aproximadamente $63.68.

3.

a. $P(12) = 214$ Ganancia diaria de $214 a un precio de $12

b. $\dfrac{P(15) - P(12)}{15 - 12} = 7$ Cuando el precio aumenta de $12 a $15, la ganancia aumenta un promedio de $7 por cada dólar de aumento en el precio.

c. $P'(x) = -2x + 34$

$P'(12) = 10$ Cuando el precio aumenta de $12 a $13, la ganancia aumenta aproximadamente $10.

d. $P(13) - P(12) = 9$ La ganancia diaria aumenta exactamente \$9 cuando el precio aumenta de \$12 a \$13.

e. $\Delta P \approx P'(12) \times .25 = 10 \times .25 = 2.50$ La ganancia aumenta \$2.50 aproximadamente cuando el precio aumenta de \$12 a \$12.25.

f. $\Delta P = P(12.25) - P(12) = 2.44$ La ganancia aumenta realmente \$2.44 cuando el precio aumenta de \$12 a \$12.25.

4.

a. $S'(x) = -.003x^2 + x$
b. $S'(200) = 80$
c. $S'(300) = 30$
d. Al invertir \$200,000 en publicidad.
e. $S(200) = \$12{,}300{,}000$
$S(300) = \$18{,}300{,}000$

MECU 3032

Reglas de cadena y potencia

1. Haga uso de la regla de la cadena para hallar $\frac{dy}{dx}$.

   a) $y = u^5$, $u = 4x^2 - 3$

   b) $y = \frac{1}{u^3}$, $u = x^3 + 2x + 5$

   c) $y = \sqrt[3]{u}$, $u = 4x - 3x^3$

2. Haga uso de la regla de la potencia para hallar la derivada de las siguientes funciones.

   a) $F(x) = (9x - 5)^8$

   b) $F(z) = \frac{2}{(4z^3 + 5z - 3)^5}$

   c) $F(p) = \sqrt{2p^4 + 3p^2 - 1}$

   d) $F(q) = \frac{4}{(q^3 + 6q)^{\frac{3}{2}}}$

   e) $F(r) = 5r^3(2 - 7r)^4$

   f) $F(s) = (4s - 3)^5(3s + 5)^8$

   g) $F(t) = \left(\frac{5t - 6}{8t + 3}\right)^7$

   h) $F(w) = \frac{8w^3}{(w^2 + 1)^6}$

   i) $F(v) = (v^4 + 3)^5 + (v^2 + 1)^3$

Respuestas

1. a) $\dfrac{dy}{dx} = 40x(4x^2 - 3)^4$

   b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x + 5)^4}$

   c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4 - 9x^2}{3\sqrt[3]{(4x - 3x^3)^2}}$

2. a) $F'(x) = 72(9x - 5)^7$

   b) $F'(z) = -\dfrac{10(12z^2 + 5)}{(4z^3 + 5z - 3)^6}$

   c) $F'(p) = \dfrac{p(4p^2 + 3)}{\sqrt{2p^4 + 3p^2 - 1)}}$

   d) $F'(q) = -\dfrac{18(q^2 + 2)}{\sqrt{(q^3 + 6q)^5}}$

   e) $F'(r) = 5r^2(2 - 7r)^3(6 - 49r)$

   f) $F'(s) = 4(4s - 3)^4(3s + 5)^7(39s + 7)$

   g) $F'(t) = \dfrac{441(5t - 6)^6}{(8t + 3)^8}$

   h) $F'(w) = \dfrac{24w^2(1 - 3w^2)}{(w^2 + 1)^7}$

   i) $F'(v) = 20v^3(v^4 + 3)^4 + 6v(v^2 + 1)^2$
   $\quad = 2v\left[10v^2(v^4 + 3)^4 + 3(v^2 + 1)^2\right]$

MECU 3032

Diferenciación de funciones exponenciales y de funciones logarítmicas

1. Halle la derivada de las siguientes funciones:

   a) $g(x) = e^{7x-2}$

   b) $g(w) = e^{w^3+2w}$

   c) $g(z) = e^{3z} + z^{3e} + e$

   d) $g(a) = 4(e^{-5a} + e^{5a})$

   e) $g(h) = \dfrac{e^{h^2} - h^2}{5}$

   f) $g(m) = \dfrac{e^{2m}}{4m}$

   g) $g(p) = 10e^{-\frac{1}{2p}}$

   h) $g(r) = 8re^{4r^2}$

   i) $g(s) = (e^{s^4} - 2s)^{10}$

   j) $g(t) = e^{(3t-1)^5}$

2. Halle la derivada de las siguientes funciones.

   a) $h(x) = 4x + \ln x$

   b) $h(z) = z^4 \ln z$

   c) $h(w) = \dfrac{\ln w}{2w^3}$

   d) $h(a) = \ln(3a^4 + 2a^2)$

e) $h(g) = 3\ln(8g - 7)$

f) $h(m) = \ln(5m^2) + \ln 5$

g) $h(n) = (6n + 5)\ln(6n + 5)$

h) $h(q) = \dfrac{\ln q^4}{2q^5}$

i) $h(r) = (\ln 6r)^5$

j) $h(t) = t^3 \ln(3t^2)$

3. Halle la derivada de las siguientes funciones logarítmicas. Use las propiedades de logaritmo antes de diferenciar.

a) $F(x) = \ln[(2x+1)(4x-3)]$

b) $G(x) = \ln\sqrt{x^2 - 16}$

c) $H(x) = \ln(x^3 + 1)^4$

d) $K(x) = \ln(\dfrac{8x}{2x+1})$

e) $M(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{3x-2}\right)^2$

Respuestas

1. a) $g'(x) = 7e^{7x-2}$

   b) $g'(w) = (3w^2 + 2)e^{w^3+2w}$

   c) $g'(z) = 3e^{3z} + 3ez^{3e-1}$

   d) $g'(a) = 4(-5e^{-5a} + 5e^{5a}) = -20(e^{-5a} - e^{5a})$

   e) $g'(h) = \dfrac{2h(e^{h^2} - 1)}{5}$

   f) $g'(m) = \dfrac{e^{2m}(2m-1)}{4m^2}$

   g) $g'(p) = \dfrac{5e^{-\frac{1}{2p}}}{p^2}$

   h) $g'(r) = 8e^{4r^2}(8r^2 + 1)$

   i) $g'(s) = 20(e^{s^4} - 2s)^9(2s^3e^{s^4} - 1)$

   j) $g'(t) = 15(3t-1)^4 e^{(3t-1)^5}$

2. a) $h'(x) = 4 + \dfrac{1}{x}$

   b) $h'(z) = z^3(1 + 4\ln z)$

   c) $h'(w) = \dfrac{1 - 3\ln w}{2w^4}$

   d) $h'(a) = \dfrac{4(3a^2 + 1)}{a(3a^2 + 2)}$

   e) $h'(g) = \dfrac{24}{8g - 7}$

f) $h'(m) = \dfrac{2}{m}$

g) $h'(n) = 6 + 6\ln(6n+5) = 6[1 + \ln(6n+5)]$

h) $h'(q) = \dfrac{4 - 5\ln q^4}{2q^6}$

i) $h'(r) = \dfrac{5(\ln 6r)^4}{r}$

j) $h'(t) = t^2[2 + 3\ln(3t^2)]$

3. a) $F'(x) = \dfrac{2}{2x+1} + \dfrac{4}{4x-3}$

b) $G'(x) = \dfrac{x}{x^2-16}$

c) $H'(x) = \dfrac{12x^2}{x^3+1}$

d) $K'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{2x+1}$

e) $M'(x) = 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{3x-2}\right)$

MECU 3032

Derivadas de orden mayor

1. Halle la tercera derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 4x^5 - 5x^4$

   b) $g(x) = \dfrac{2}{x^3}$

   c) $h(x) = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{x}}$

2. Halle $F''(x)$ para las siguientes funciones:

   a) $F(x) = \dfrac{2}{(5x-3)^4}$

   b) $F(x) = 4xe^{-x}$

   c) $F(x) = \ln(x^2 + 5)$

3. Si $G(x) = 2x - x^3$ determine la razón de cambio de $G(x)$ cuando $x = 1$.

Respuestas

1. a) $f'''(x) = 240x^2 - 120x$

   b) $g'''(x) = -120x^{-6} = -\dfrac{120}{x^6}$

   c) $h'''(x) = -\dfrac{7}{9}x^{-\frac{10}{3}} = -\dfrac{7}{9\sqrt[3]{x^{10}}}$

2. a) $F''(x) = \dfrac{1000}{(5x-3)^6}$

   b) $F''(x) = -4e^{-x}(2-x)$

   c) $F''(x) = \dfrac{-2x^2 + 10}{(x^2+5)^2}$

3. $G'(1) = -1$

MECU 3032

Ejercicios de repaso para el segundo examen

1. Halle la derivada de las siguientes funciones y simplifique:

a) $f(x) = 12x^{1/4} + 6x^{-2/3}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{8}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{3(x^6 - x^4)}{2}$

d) $k(x) = \dfrac{x^{10} - 8x^5}{2x}$

e) $l(x) = \dfrac{4}{x^3 - 2}$

f) $m(x) = \sqrt[4]{(3x^2 - 5x + 1)^3}$

g) $n(x) = \left(\dfrac{2x+5}{x^2+1}\right)^4$

h) $p(x) = x^4(4x-3)^6$

i) $q(x) = \dfrac{5x-4}{(x^3+2)^3}$

j) $r(x) = 8e^x - x^8 + 8e^8x - e^{8x}$

k) $s(x) = 6xe^{2x}$

l) $t(x) = \dfrac{e^{x^4}}{2x^4}$

m) $u(x) = (e^{4x} - 1)^6$

n) $v(x) = e^{(7x-4)^3}$

o) $w(x) = \ln(3x^4 - 5x^2 + 4)$

p) $f(m) = 4m^3 \ln(4m)$

q) $f(p) = \dfrac{\ln(6p^2)}{3p}$

r) $f(q) = [\ln(8q+1)]^{10}$

s) $f(s) = \ln\sqrt{s^2 + s}$

t) $f(t) = \ln\left(\dfrac{t^2}{t^2+1}\right)$

u) $f(v) = \ln\left(\dfrac{2v}{3v+1}\right)^4$

2. Halle la derivada que se indica:

a) $F'''(x)$ si $F(x)=\dfrac{2}{4x-3}$

b) $G''(x)$ si $G(x)=5xe^{5x}$

c) $H'''(x)$ si $H(x)=\dfrac{1}{5x^4}$

d) $K''(z)$ si $K(z)=4z\ln z^2$

3. Use la **regla de la cadena** para hallar $\dfrac{dy}{dx}$

a) $y=\sqrt{u}$, $u=6x^3-x^2$

b) $y=\dfrac{3}{4u^2}$, $u=x^4+1$

4. El costo total diario de fabricar cierto producto está dado por la función $C(x)=-.001x^2+60x+200$, donde x representa el nivel de producción.
a) Halle la función de costo marginal.
b) Halle $C'(200)$ e interprete su resultado.
c) Halle el costo real de fabricar la unidad número 101.

Respuestas

1.

a) $f'(x)=3x^{-3/4}-4x^{-5/3}$

b) $g'(x)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{8}{x^2}$

c) $h'(x)=3x^3(3x^2-2)$

d) $k'(x)=\dfrac{x^3(9x^5-32)}{2}$

e) $l'(x)=\dfrac{-12x^2}{(x^3-2)^2}$

f) $m'(x)=\dfrac{3(6x-5)}{4\sqrt[4]{3x^2-5x+1}}$

g) $n'(x)=\dfrac{-8(2x+5)^3(x^2+5x-1)}{(x^2+1)^5}$

h) $p'(x)=4x^3(4x-3)^5(10x-3)$

i) $q'(x) = -\dfrac{2(20x^3 - 18x^2 - 5)}{(x^3+2)^4}$

j) $r'(x) = 8(e^x - x^7 + e^8 - e^{8x})$

k) $s'(x) = 6e^{2x}(2x+1)$

l) $t'(x) = \dfrac{2e^{x^4}(x^4-1)}{x^5} = \dfrac{2e^{x^4}(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^5}$

m) $u'(x) = 24e^{4x}(e^{4x}-1)^5$

n) $v'(x) = 21(7x-4)^2 e^{(7x-4)^3}$

o) $w'(x) = \dfrac{12x^3 - 10x}{3x^4 - 5x^2 + 4} = \dfrac{2x(6x^2-5)}{3x^4 - 5x^2 + 4}$

p) $f'(m) = 4m^2[1 + 3\ln(4m)]$

q) $f'(p) = \dfrac{2 - \ln(6p^2)}{3p^2}$

r) $f'(q) = \dfrac{80[\ln(8q+1)]^9}{8q+1}$

s) $f'(s) = \dfrac{2s+1}{2s(s+1)}$

t) $f'(t) = \dfrac{2}{t} - \dfrac{2t}{t^2+1}$

u) $f'(v) = 4\left(\dfrac{1}{v} - \dfrac{3}{3v+1}\right)$

2.

a) $F(x) = 2(4x-3)^{-1}$

$F'(x) = -8(4x-3)^{-2} = -\dfrac{8}{(4x-3)^2}$

$F''(x) = \dfrac{64}{(4x-3)^3}$

$F'''(x) = -\dfrac{768}{(4x-3)^4}$

b) $G'(x) = 5e^{5x}(5x+1)$

$G''(x) = 25e^{5x}(5x+2)$

c) $H(x) = \frac{1}{5}x^{-4}$

$H'(x) = -\frac{4}{5}x^{-5} = \frac{-4}{5x^5}$

$H''(x) = 4x^{-6} = \frac{4}{x^6}$

$H'''(x) = -24x^{-7} = \frac{-24}{x^7}$

d) $K(z) = 8z \ln z$

$K'(z) = 8 + 8 \ln z = 8(1 + \ln z)$

$K''(z) = \frac{8}{z}$

3.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(9x-1)}{\sqrt{6x^3 - x^2}}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-6x^3}{(x^4+1)^3}$

4.

a) $C'(x) = -.002x + 60$

b) $C'(200) = 59.60$ El costo total aumenta aproximadamente \$59.60 cuando el nivel de producción aumenta de 200 a 201 unidades. Ó: el costo estimado de fabricar la unidad número 201 es de aproximadamente \$59.60.

c) \$59.799

MECU 3032

Máximos y mínimos relativos

1. Para cada función determine: dominio, intervalos de continuidad, intervalos donde es creciente; donde es decreciente y las coordenadas de los extremos relativos.

   a) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$

   b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

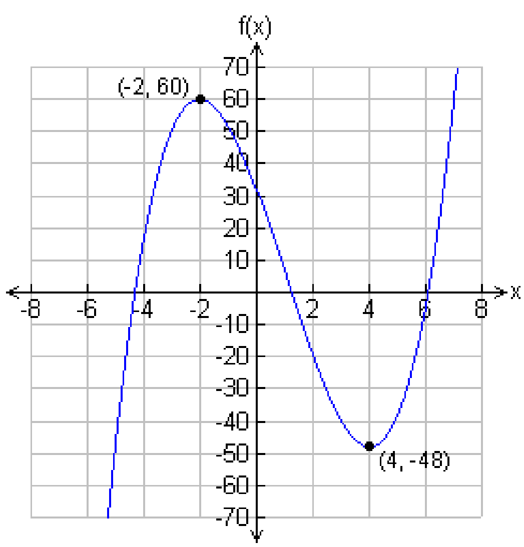
   c) $f(x) = x^{4/3} + 1$

   d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

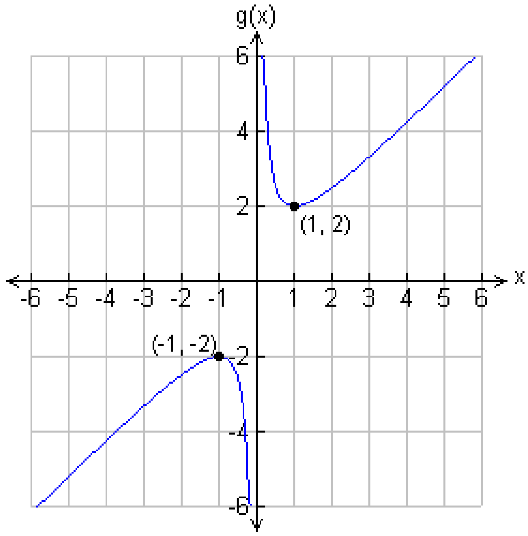
   e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

2. En las siguientes gráficas determine los intervalos donde la función es creciente, en donde es decreciente y las coordenadas de los extremos relativos, si los hay.

   a)



b)



Respuestas

1. a) Dominio: $(-\infty,\infty)$, Creciente en: $(-\infty,0)\cup(2/3,\infty)$, Decreciente en: (0,2/3), Max. Rel en (0, -1), Min. Rel en (2/3, -31/27)

   b) Dominio: $(-\infty,\infty)$, Creciente en: $(-1,0)\cup(1,\infty)$, Decreciente en: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, Máx. Rel en (0, 2), Min. Rel en (-1,1) y (1,1)

   c) Dominio: $(-\infty,\infty)$, Creciente en: $(0,\infty)$, Decreciente en: $(-\infty,0)$, Min. Rel en (0,1)

   d) Dominio: $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$, Creciente en: $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$, Decreciente en: $(-2,-1)\cup(-1,0)$, Max. Rel en: (-2, -4), Min. Rel en: (0, 0)

   e) Dominio: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, Creciente en: $(1,\infty)$, Decreciente en: $(-\infty,0)\cup(0,1)$ Min. Rel en (1, e)

2. a) Creciente en: $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$, Decreciente en: (-2, -4), Max. Rel en: (-2, 60)
   Min. Rel en: (4, -48)

   b) Creciente en: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, Decreciente en: (-1, 1), Max. Rel en: (-1, -2),
   Min. Rel en: (1, 2)

MECU 3032

Extremos absolutos

1. Halle las coordenadas de los extremos absolutos de cada función en los intervalos indicados. Halle, además, las coordenadas de los extremos relativos.
   a) $f(x) = x^3 - 12x + 3$, [-3,3], [0,4]
   b) $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$, [-1, 1]
   c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, [1,4]

2. Explique porqué $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ no tiene extremos absolutos en [0,2].

Respuestas

1. a) En [-3, 3]: Máximo rel. y abs. (-2, 19), Mínimo rel. y abs. (2, -13)
   En [0, 4]: Máximo absoluto: (4, 19), Mínimo rel. y abs.: (2, -13);
   No hay máximo relativo.

   b) En [-1, 1]: Máximo absoluto: (-1, 2) y (1, 2), Mínimo rel. y abs.: (0, 1)
   No hay máximo relativo.

   c) En [1, 4]: Máximo absoluto: (4, 4/5), Mínimo absoluto: (1, ½),
   No hay extremos relativos.

2. $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ no tiene extremos absolutos en [0, 2] porque la función no es continua en el intervalo [0, 2].

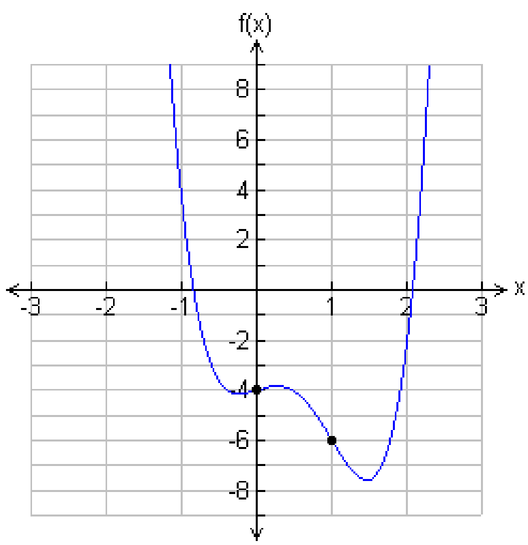
MECU 3032

Concavidad y trazado de curvas

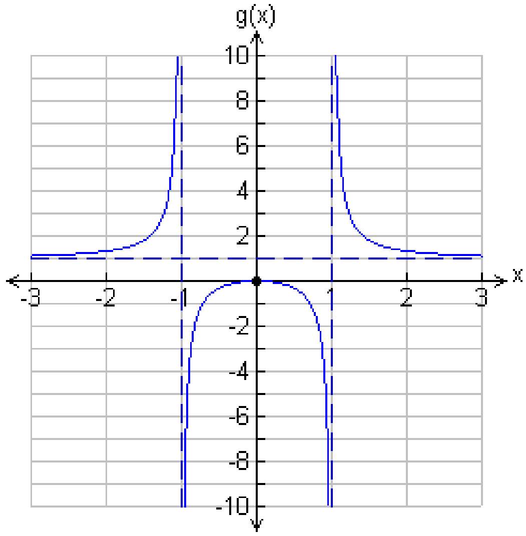
1. Para cada función determine: intervalos donde la función es cóncava hacia arriba, donde es cóncava hacia abajo y las coordenadas de los puntos de inflexión.
   a) $g(x) = 2x^3 - 12x^2 + 6x - 4$
   b) $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 12x^2 + 3$
   c) $k(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
   d) $p(x) = 2xe^{2x}$

2. En las siguientes gráficas determine los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba, donde es cóncava hacia abajo y los puntos de inflexión, si los hay.

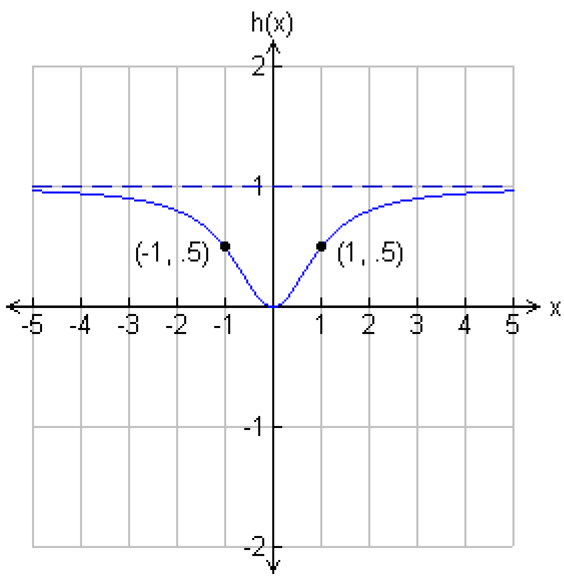
   a)



b)



c)



3. Para cada función determine: dominio, interceptos, ecuación de las asíntotas (si hay), intervalos donde la función es creciente, donde es decreciente, donde es cóncava hacia arriba, donde es cóncava hacia abajo y las coordenadas de los extremos relativos y de los puntos de inflexión. Además, trace un esquema de su gráfica.

   a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2$

   b) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1$

   c) $f(x) = \dfrac{4x-4}{x^2}$

4. Trace la gráfica de una función con las siguientes características:

   a) Dominio: $(-\infty, \infty)$
   $f(0) = 0,\ f(4) = 0$
   $f'(x) < 0 : (-\infty, 0) \cup (0,3)$
   $f''(x) > 0 : (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
   Mínimo relativo en: (3,-27/4)
   Puntos de inflexión en: (0,0) y (2,-4)

   b) Dominio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
   $f(-2) = 0,\ f(0) = 0,\ f(2) = 0$
   $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$
   Asíntota vertical en: $x = \pm 1$
   $f'(x) < 0 : (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   $f'(x) > 0 : (0,1) \cup (1, \infty)$
   $f''(x) > 0 : (-1, 1)$
   $f''(x) > 0 : (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Respuestas

1. a) Cóncava hacia abajo: $(-\infty, 2)$, Cóncava hacia arriba: $(2, \infty)$
   Punto de inflexión: (2,-12)

   b) Cóncava hacia abajo: (-2.2), Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
   Puntos de inflexión: (-2, -37), (2, -37)

   c) Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, Cóncava hacia arriba: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, Puntos de inflexión: (0,0), $(\sqrt{3}, .433)$, $(-\sqrt{3}, -.433)$

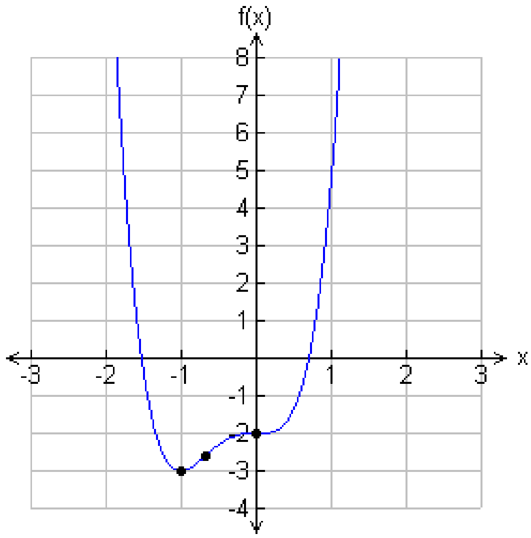
   d) Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1)$, Cóncava hacia arriba: $(-1, \infty)$
   Punto de inflexión: $(-1, -2e^{-2})$

2. a) Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, Cóncava hacia abajo: $(0, 1)$
   Puntos de inflexión: (0,-4) y (1,-6)

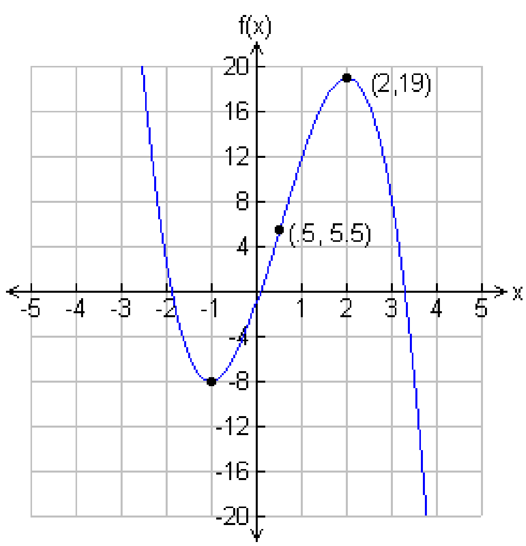
   b) Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, Cóncava hacia abajo: (-1,1)
   Puntos de inflexión: no hay

   c) Cóncava hacia arriba: (-1,1), Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
   Puntos de inflexión: (-1, .5) y (1, .5)

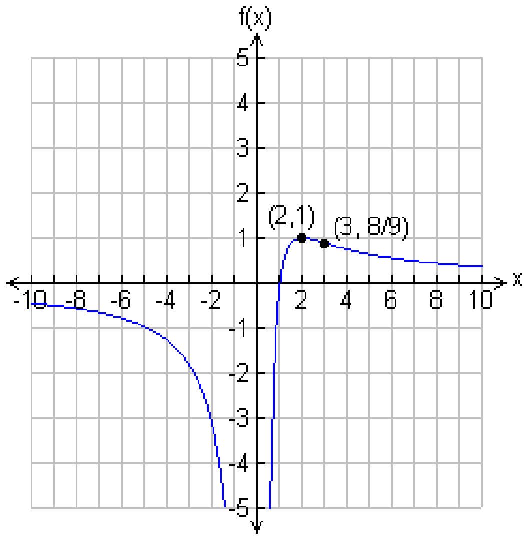
3. a) Dominio: $\Re$, Int. en y (0,-2), Creciente en: $(-1, 0) \cup (0, \infty)$,
   Decreciente en: $(-\infty, -1)$, Cóncava hacia abajo: $(-\frac{2}{3}, 0)$,
   Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$, Mínimo relativo: (-1,-3),
   Puntos de inflexión: $(-\frac{2}{3}, -\frac{70}{27})$, (0,-2)



b) Dominio: $\Re$, Int. en y: (0, -1), Creciente en: (-1,2), Decreciente en: $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$, Cóncava hacia arriba: $(-\infty,1/2)$, Cóncava hacia abajo: $(1/2,\infty)$, Mínimo relativo: (-1, -8), Máximo relativo: (2,19), Punto de inflexión: (½, 5 ½)

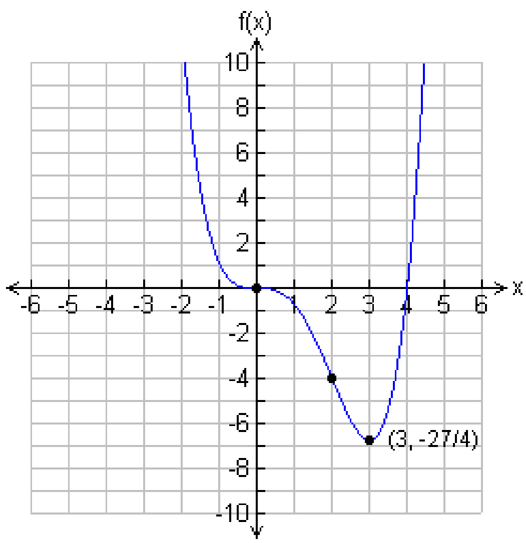


c) Dominio: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, Int. en x: (1,0), Asíntota vertical: $x=0$,
Asínt. horizontal: $y=0$, Decreciente en: $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, Creciente en: (0, 2),
Cóncava hacia abajo: $(-\infty,0)\cup(0,3)$, Cóncava hacia arriba: $(3,\infty)$,
Máximo relativo: (2,1), Punto de inflexión: (3, 8/9)

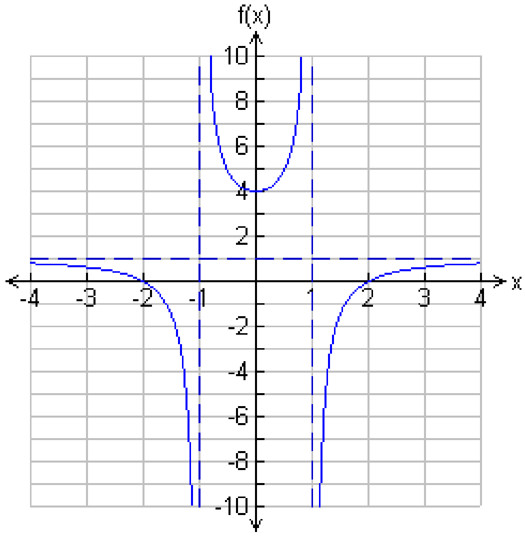


4.

a)



b)



MECU 3032

Criterio de la segunda derivada

Use el criterio de la segunda derivada, si es posible, para hallar los extremos relativos de cada función.

1. $f(x) = x^3 - 12x + 10$
2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 9x + 4$
3. $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$
4. $f(x) = 2x^4 - 5$

Respuestas

1. Mínimo relativo: (2, -6), Máximo relativo: (-2, 26)
2. Mínimo relativo: (9, -158), Máximo relativo: (-1, 26/3)
3. Mínimo relativo: (1, 4), Máximo relativo: (-1, -4)
4. No se puede hacer uso del criterio de la segunda derivada para hallar los extremos relativos de la función.

MECU 3032

Aplicaciones de máximos y mínimos

1. El costo promedio por unidad al fabricar cierto producto está dado por la función $\bar{C}(x) = .5x^2 - 54\sqrt{x} + 300$, donde x representa la cantidad de unidades fabricadas. Halle el costo promedio mínimo.

2. Si la función de demanda para el producto de cierta compañía está dada por $p = 300 - 2\sqrt{q}$, donde p es el precio por unidad al cual se demandan q unidades al mes. Halle ingreso máximo de la compañía. ¿A qué precio por unidad ocurre el ingreso máximo?

3. La función de ganancia para cierta compañía está dada por $P(x) = -x^3 + 150x^2 - 4800x$, donde x representa la cantidad de unidades que la compañía puede fabricar y vender a la semana.

    a) Halle la ganancia máxima semanal si la compañía puede fabricar un máximo de 50 unidades a la semana.
    b) Halle la ganancia máxima semanal si la compañía puede fabricar un máximo de 100 unidades a la semana.

4. El costo total de fabricar x unidades al día de cierto producto está dado por la función $C(x) = 0.0001x^2 + 4x + 500$. Si la ecuación de demanda para el mismo producto está dada por: $p = 12 - .0004x$ donde p es el precio por unidad al cual se demandan x unidades al día, halle el nivel de producción y ventas que maximiza la ganancia diaria del fabricante. Halle, además, la ganancia máxima diaria.

Respuestas

1. El costo promedio mínimo es $178.50.

2. El ingreso máximo es de $1,000,000.
   El precio es de $100 por unidad.
3. a) Ganancia máxima de $10,000.
   b) Ganancia máxima de $64,000.

4. El nivel de producción que maximiza la ganancia del fabricante es de 8,000 unidades y la ganancia máxima diaria es de $31,500.

MECU 3032

Ejercicios de repaso para el tercer examen

1. Para las siguientes funciones determine: dominio, recorrido (alcance), intercepto en y, asíntotas (si aplica), intervalos donde la función es creciente, donde es decreciente, cóncava hacia arriba, hacia abajo, extremos relativos y puntos de inflexión. Trace la gráfica.

   a. $f(x) = x^5 - 5x + 2$

   b. $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 3}$

2. Trace una gráfica que cumpla con las siguientes condiciones:

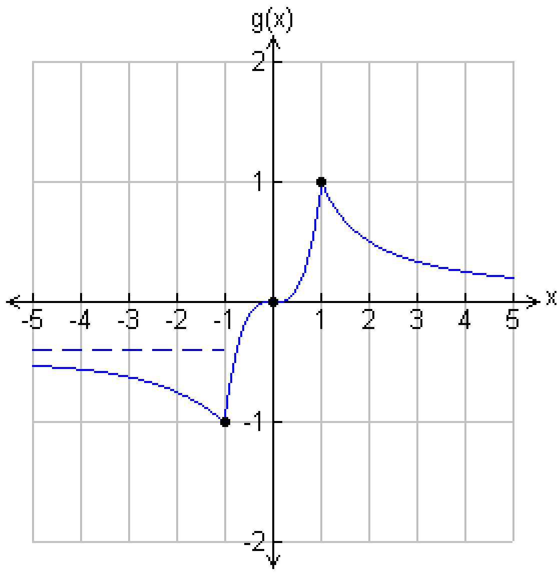
   a. Dominio: $(-\infty, \infty)$
   Continua en: $(-\infty, \infty)$
   $f(0) = 15$, $f(1) = -12$, $f(2) = -1$, $f(4) = 15$
   $f'(x) > 0$ en: $(1,4) \cup (4, \infty)$
   $f'(x) < 0$ en: $(-\infty, 1)$
   $f''(x) > 0$ en: $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$
   $f''(x) < 0$ en: $(2,4)$

   b. Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
   Continua en: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
   $f(4) = \dfrac{1}{8}$, $f(6) = \dfrac{1}{9}$
   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
   $f'(x) > 0$ en: $(0,4)$
   $f'(x) < 0$ en: $(-\infty.0) \cup (4, \infty)$
   $f''(x) > 0$ en: $(6, \infty)$
   $f''(x) < 0$ en: $(-\infty, 0) \cup (0,6)$

3. Halle los extremos absolutos de $f(x) = 6x^2 - 3x^4 + 2$ en [0,2].

4. El costo total (en dólares) de fabricar x unidades de cierto producto está dado por: $C(x) = .0001x^2 + .05x + 900$.
   a. Halle la función de costo promedio.
   b. Determine el nivel de producción que minimiza el costo promedio.
   c. Halle el costo promedio mínimo.

5. Conteste a base de la gráfica de $y = g(x)$ que aparece a continuación:



a) Halle las coordenadas de:
   1) el máximo absoluto
   2) el mínimo absoluto
   3) el (los) máximo(s) relativo(s)
   4) el (los) mínimo(s) relativo)s)
   5) el (los) punto(s) de inflexión

b) Halle todos los intervalos abiertos donde $g(x)$:
   1) es creciente
   2) es decreciente
   3) es cóncava hacia arriba
   4) es cóncava hacia abajo
   5) es creciente y, además, cóncava hacia abajo

c) Determine el signo de:
   1) $g'(-3)$
   2) $g''(2)$

Respuestas

1.

a. Dominio: $(-\infty,\infty)$

Intercepto en y: (0, 2)

f es creciente en: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

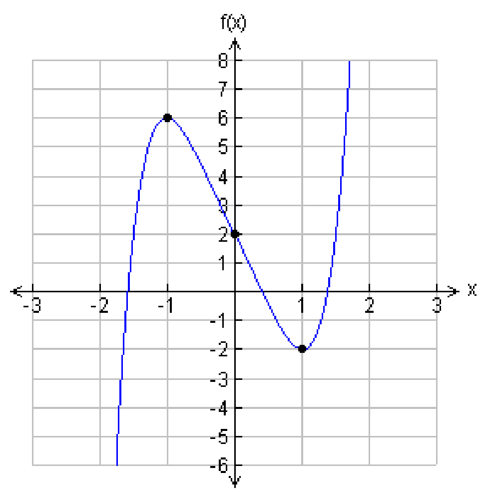
f es decreciente en: (-1,1)

f es concava hacia arriba en: $(0,\infty)$

f es cóncava hacia abajo en: $(-\infty,0)$

Máximo relativo en (-1, 6), mínimo relativo en (1, -2)

Punto de inflexión en (0, 2).



b. Dominio: $(-\infty,\infty)$

Intercepto en y: (0, 1)

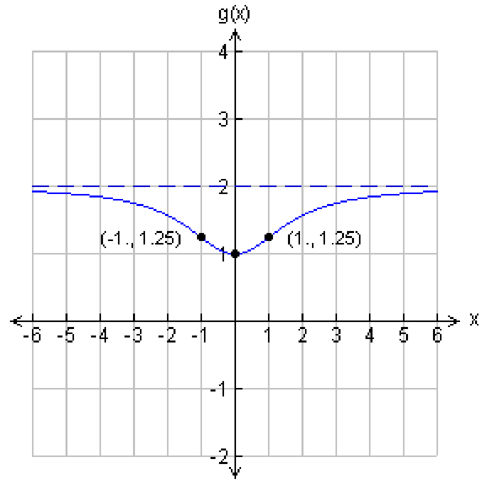
Asíntota horizontal en $y = 2$

g es creciente en $(0,\infty)$; decreciente en $(-\infty,0)$

g es cóncava hacia arriba en $(-1,1)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

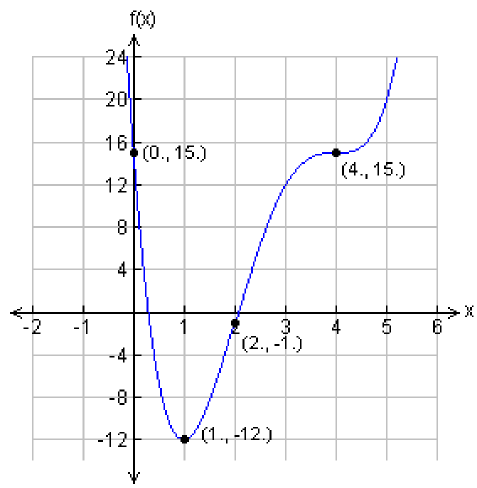
Mínimo relativo y absoluto en (0, 1)

Puntos de inflexión: $(-1,\frac{5}{4})$, $(1,\frac{5}{4})$

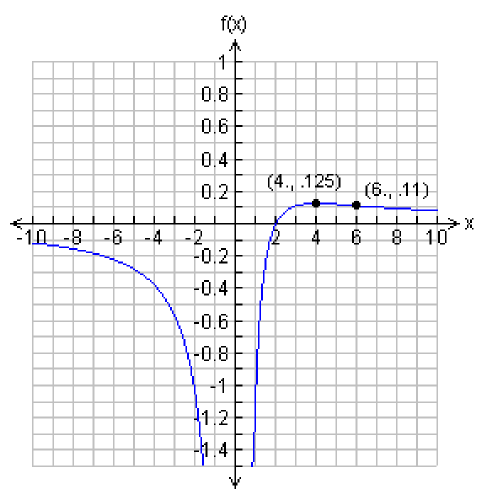


2.

a.



b.



3. Máximo absoluto en (1, 5), mínimo absoluto en (2, -22)

4.
   a. $\bar{C}(x) = .0001x^2 + .05 + \dfrac{900}{x}$
   b. El costo promedio se minimiza a un nivel de producción de 3,000 unidades.
   c. El costo promedio mínimo es de $.65

5.
   a. 1) (1, 1)
      2) (-1, -1)
      3) (1, 1)
      4) (-1, -1)
      5) (0, 0)

   b. 1) $(-1,0) \cup (0,1)$
      2) $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
      3) $(0,1) \cup (1,\infty)$
      4) $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$
      5) $(-1,0)$

   c. 1) negativo
      2) positivo

MECU 3032

El integral indefinido

Haga uso de las reglas básicas de integración para hallar los siguientes integrales indefinidos.

1. $\int 15dx$
2. $\int edx$
3. $\int x^6 dx$
4. $\int \frac{1}{x^4}dx$
5. $\int t^{\frac{3}{4}}dt$
6. $\int 2t^{-\frac{2}{3}}dt$
7. $\int \frac{6}{s^8}ds$
8. $\int \frac{1}{4\sqrt{s}}ds$
9. $\int (u^4 - 2u^3 + 1)du$
10. $\int (u^{\frac{5}{2}} + u^{\frac{3}{2}} + u^{-\frac{1}{3}})du$
11. $\int (4e^x + e^2 - x^e)dx$
12. $\int (4p^3 + 2p + p^{-1})dp$
13. $\int (\frac{q^5 - 3q^4 + 2q}{q^2})dq$
14. $\int x^3(5x - 2)dx$
15. $\int (3t - 2)^2 dt$
16. $\int \frac{2t}{\sqrt[3]{t}}dt$
17. $\int e^{8m} dm$
18. $\int e^{\frac{1}{3}v} dv$

Respuestas

1. $15x + C$
2. $ex + C$
3. $\dfrac{x^7}{7} + C$
4. $-\dfrac{x^{-3}}{3} + C = -\dfrac{1}{3x^3} + C$
5. $\dfrac{4}{7} t^{\frac{7}{4}} + C$
6. $6t^{\frac{1}{3}} + C$
7. $-\dfrac{6s^{-7}}{7} + C = -\dfrac{6}{7s^7} + C$
8. $\dfrac{1}{2} s^{\frac{1}{2}} + C = \dfrac{1}{2}\sqrt{s} + C$
9. $\dfrac{u^5}{5} - \dfrac{u^4}{2} + u + C$
10. $\dfrac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + \dfrac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + \dfrac{3u^{\frac{4}{3}}}{4} + C$
11. $4e^x + e^2 x - \dfrac{x^{e+1}}{e+1} + C$
12. $p^4 + p^2 + \ln|p| + C$
13. $\dfrac{q^4}{4} - q^3 + 2\ln|q| + C$
14. $x^5 - \dfrac{1}{2} x^4 + C$
15. $3t^t - 6t^2 + 4t + C$
16. $\dfrac{6}{5} t^{\frac{5}{3}} + C$
17. $\dfrac{1}{8} e^{8m} + C$
18. $3e^{\frac{1}{3}v} + C$

MECU 3032

Integración con condiciones iniciales

1. Halle $f(x)$ sujeto a las condiciones dadas.
   a) $f'(x) = 6x - 3; \quad f(-2) = 10$
   b) $f'(x) = 3x^2 + 2x; \quad f(1) = 3$

2. Halle $f(x)$ sujeto a las condiciones dadas.
   a) $f''(x) = 4x^3 + 4x; \quad f'(0) = -2, \quad f(1) = 0$
   b) $f''(x) = e^x - 2; \quad f'(0) = 2, \quad f(0) = -3$

3. Si $R'(x)$ es una función de ingreso marginal, halle la función de ingreso. Halle además la ecuación de demanda que expresa al precio (p) en términos de la demanda (x).
   a) $R'(x) = 50 - .03x$
   b) $R'(x) = -.006x^2 + 100x + 500$

4. En la manufactura de cierto producto, los costos fijos son de $5,000 al mes y la función de costo marginal está dada por $C'(x) = .004x + 10$, donde x representa el nivel de producción mensual, en unidades.
   a) Halle la función de costo total.
   b) Determine el costo total de fabricar 100 unidades del producto al mes.

Respuestas

1. a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 8$
   b) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

2. a) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{2} - 2x - \dfrac{13}{10}$
   b) $f(x) = e^x - x^2 + x - 4$

3. a) $R(x) = 50x - .015x^2; \; p = 50 - .015x$
   b) $R(x) = -.002x^3 + 50x^2 + 500x; \; p = -.002x^2 + 50x + 500$

4. a) $C(x) = .002x^2 + 10x + 5000$
   b) $6,020

MECU 3032

El integral definido

Evalúe los siguientes integrales definidos.

1. $\int_{1}^{2} 8dx$
2. $\int_{-1}^{3} -4xdx$
3. $\int_{-2}^{2} (5-4t)dt$
4. $\int_{1}^{3} (3t^2-6t+1)dt$
5. $\int_{2}^{4} 2t^{-2}dt$
6. $\int_{1}^{4} 3\sqrt{v}dv$
7. $\int_{1}^{e} \frac{2}{v}dv$
8. $\int_{1}^{16} (p^{-\frac{1}{2}}+1)dp$

Respuestas

1. 8
2. –16
3. 20
4. 4
5. ½
6. 14
7. 2
8. 21

MECU 3032

Área bajo una curva

1. Aproxime el área de la región bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo dado, circunscribiendo 4 rectángulos en la región. Divida el intervalo en cuatro subintervalos de igual largo y use el extremo derecho de cada subintervalo para aproximar el área.
   a. $f(x) = 8x$, [0,2]
   b. $f(x) = 4x + 2$, [1,3]
   c. $f(x) = 3x^2$, [0,1]

2. Use un integral definido para hallar el área de la región limitada por la curva, el eje de x y las líneas dadas. Sombree la región haciendo uso de la gráfica de la curva.
   a. $y = 6x,\ \ x = 3.$
   b. $y = 2x - 4,\ \ x = 4$
   c. $y = 3x^2,\ \ x = 1, x = 2$
   d. $y = 2x - x^2$
   e. $y = x^2 + 2x + 4,\ \ x = -1, x = 1$
   f. $y = \sqrt{x},\ \ x = 1, x = 4$
   g. $y = 4e^x,\ \ x = 0, x = 2$

Respuestas

1. a) 20 u^2
   b) 22 u^2
   c) $\frac{21}{16}u^2$

2. a) 27 unidades al cuadrado
   b) 4 unidades al cuadrado
   c) 7 unidades al cuadrado
   d) $\frac{4}{3}$ unidades al cuadrado
   e) $\frac{26}{3}$ unidades al cuadrado
   f) $\frac{14}{3}$ unidades al cuadrado
   g) $(4e^2 - 4)$ unidades al cuadrado